



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

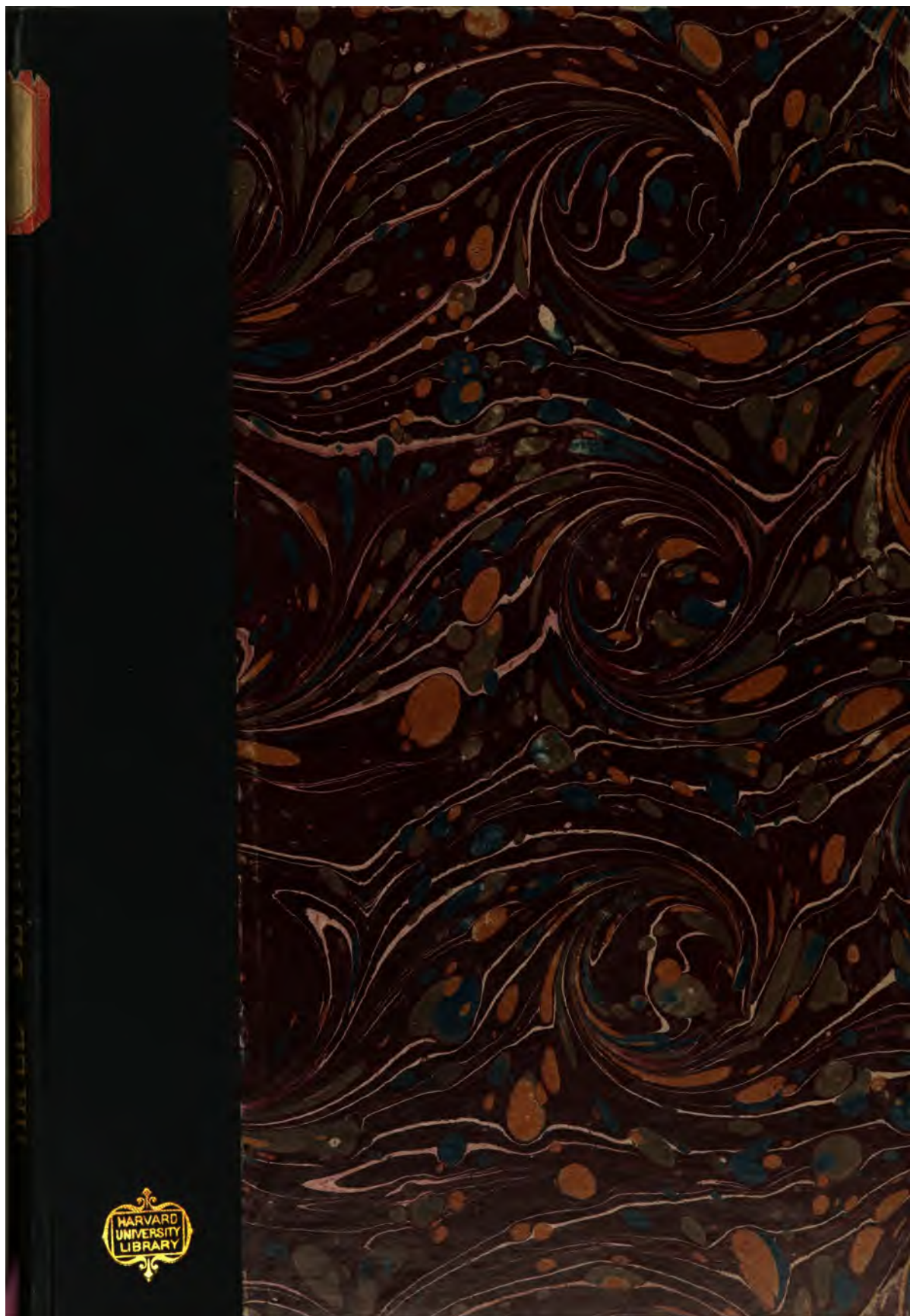
Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



SCIENCE CENTER LIBRARY

math 4509.02.3



Harvard College Library

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.

AND HIS WIDOW

ELIZA FARRAR

FOR

"BOOKS, IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY"

Bestimmung der Definitionsgleichungen
aller endlichen continuirlichen Gruppen
von Punkttransformationen in der Ebene.

Inaugural-Dissertation

der

Hohen Philosophischen Facultät

der

Universität Leipzig

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

Arthur Graham Hall

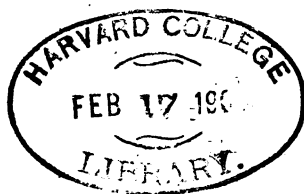
aus Michigan, U. S. A.

Leipzig

Druck von Breitkopf & Härtel

1902.

Math 5509.02.3



Farrar fund

Inhalts-Verzeichnis.

	Seite
§ I. Einleitung	5
(a) Hauptbegriffe der Gruppentheorie.	
(b) Aufstellung der Aufgabe.	
(c) Beispiel der directen Methode.	
(d) Erklärung der Lie-Engel'schen Methode.	
(e) Plan der vorliegenden Arbeit.	
§ II. Vorbemerkungen	12
(a) Bezeichnungen.	
(b) Besondere Beziehungen.	
(c) Wichtige Formeln.	
§ III. Ausführliche Behandlung der Typen 1.) und 8.) . . .	16
§ IV. Tabelle der Gruppentypen	28
§ V. Untersuchungen über	30
(a) die Ordnungszahl der Erweiterung,	
(b) die gesammte Zahl der Invarianten.	
§ VI. Bestimmung der Zahl der wesentlichen Invarianten jeder Ordnung	39
§ VII. Zusammenstellung der sämtlichen	44
(a) Invarianten,	
(b) Definitionsgleichungen und	
(c) Integrabilitätsbedingungen der verschiedenen Gruppen.	

§ I.

Einleitung.

Die folgende Arbeit beschäftigt sich mit einer ganz bestimmten Aufgabe in der Theorie der Transformationsgruppen. Um das Verständnis der Umstände und Bedeutung dieser Aufgabe zu fördern, wäre es vorteilhaft, zunächst die angewendeten Hauptbegriffe und Hauptsätze aus der Theorie der Transformationsgruppen zusammenzufassen. Die Beweise dieser und der später benutzten Sätze unterdrücke ich. Man findet sie in den an den betreffenden Stellen citirten Schriften von Sophus Lie, dem Urheber der Theorie der Transformationsgruppen, und von seinem Mitarbeiter, Herrn Professor Dr. Friedrich Engel, dem ich für die Anregung zu diesen Untersuchungen, sowie für zahlreiche gütige Unterstützungen zu grösstem Dank verpflichtet bin. Die folgende Zusammenfassung der Grundsätze der Gruppentheorie ziehe ich aus dem ersten Abschnitt der »Theorie der Transformationsgruppen, unter Mitwirkung von Dr. Fr. Engel bearbeitet von Sophus Lie«, Leipzig, Teubner, 1888—1893.

Eine Schar von Transformationen

$$x'_i = f_i(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_r) \quad (i = 1, \dots, n)$$

der Variabeln $x_1 \dots x_n$ bildet eine endliche, continuirliche Transformationsgruppe, wenn zwei Transformationen der Schar nach einander ausgeführt wieder eine Transformation der Schar ergeben. Sind die Parameter $a_1 \dots a_r$ alle wesentlich, so nennen wir die Gruppe r -gliedrig.

Jede eingliedrige Gruppe, welche die identische Transformation enthält, ist von einer ganz bestimmten infinitesimalen Transformation von der Gestalt

$$x'_i = x_i + \xi_i(x_1 \dots x_n) \delta t \quad (i = 1, \dots, n),$$

oder

$$X(f) = \sum_1^n \xi_i(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

erzeugt. Ist es nicht möglich, r Constanten $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_r$ so zu wählen, dass der Ausdruck $\mathbf{e}_1 X_1(f) + \dots + \mathbf{e}_r X_r(f)$ identisch verschwindet, heissen die r infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \dots X_r(f)$ von einander unabhängig.

Eine Schar von r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \dots X_r(f)$ bildet eine r -gliedrige Gruppe dann und nur dann, wenn zwischen den $X(f)$ Beziehungen von der Form

$$(X_i X_k) \equiv X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = \sum_{s=1}^r c_{iks} X_s(f) \quad (i, k = 1, \dots, r)$$

bestehen. Diese Gruppe enthält auch alle aus den $X_1(f) \dots X_r(f)$ linear oder durch Klammeroperationen abgeleiteten infinitesimalen Transformationen,

$$\mathbf{e}_i X_i(f) + \mathbf{e}_k X_k(f)$$

und

$$(X_i X_k) \quad (i, k = 1, \dots, r).$$

Die Transformation

$$\mathbf{e}_1 X_1(f) + \dots + \mathbf{e}_r X_r(f)$$

nennen wir die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe.

Zwei r -gliedrige Transformationsgruppen heissen ähnlich, wenn die eine bei Einführung geeigneter Variabeln in die andere übergeht.

Ein analytischer Ausdruck gestattet eine Transformation, wenn er sich bei der betreffenden Transformation nicht ändert. Eine Funktion $\varphi(x_1 \dots x_n)$ bleibt bei einer infinitesimalen Transformation invariant, wenn der Ausdruck $X(\varphi)$ identisch verschwindet. Also sind die Invarianten einer r -gliedrigen Gruppe von infinitesimalen Transformationen die Lösungen des Systems von partiellen Differentialgleichungen

$$X_1(f) = 0, \quad \dots \quad X_r(f) = 0.$$

Ist

$$X(f) = \sum_{k=1}^r \mathbf{e}_k X_k(f) = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

die allgemeine infinitesimale Transformation einer vorgelegten r -gliedrigen Gruppe, so ist

$$\xi_i = \sum_{k=1}^r \mathbf{e}_k \xi_{ik}(x_1 \dots x_n) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Differentiiren wir die letzteren Gleichungen hinreichend oft, und eliminiren wir aus den erhaltenen Gleichungen die Constanten $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_r$, so bekommen wir ein System von linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\sum_1^n A_{hi}(x_1 \dots x_n) \xi_i + \sum_{i,k}^{1 \dots n} B_{hik}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \dots = 0$$

$$(h = 1, 2, \dots),$$

die die Grössen $\xi_1 \dots \xi_n$ und damit die Gruppe selbst vollständig definiren, und die Lie die Definitionsgleichungen der betreffenden Gruppe nennt*). Umgekehrt definirt ein System linearer, homogener Differentialgleichungen von der oben geschriebenen Form eine endliche, continuirliche Transformationsgruppe, wenn seine allgemeinsten Lösungen $\xi_1 \dots \xi_n$ nur von willkürlichen Constanten abhängen, und wenn sich aus irgend zwei Lösungssystemen $\xi_{11} \dots \xi_{n1}$, $\xi_{12} \dots \xi_{n2}$ immer ein neues System von der Form

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial f_{j2}}{\partial x_i} - \xi_{i2} \frac{\partial \xi_{j1}}{\partial x_i} \right) \quad (j = 1, \dots, n)$$

zusammensetzen lässt. Hängt das allgemeinste Lösungssystem nicht nur von willkürlichen Constanten ab, sondern auch von willkürlichen Functionen, so ist die definirte Gruppe von infinitesimalen Transformationen eine unendliche.

Im folgenden betrachten wir nur die endlichen Gruppen.

Um eine Gruppe wirklich und vollständig zu bestimmen, müssen diese Differentialgleichungen ein unbeschränkt integrables System bilden, d. h. es darf nicht möglich sein, durch Differentiation und Combination derselben eine neue Differentialgleichung von derselben oder niedrigerer Ordnung zu erhalten. Ist das System nicht unbeschränkt integrabel, so müssen wir alle möglichen, vermittels der angedeuteten Operationen abgeleiteten, neuen Differentialgleichungen hinzufügen.

Als Beispiel führen wir diese Methode bei der Gruppe der Euklidischen Bewegungen in der Ebene aus. Diese Gruppe ist dreigliedrig und besteht aus den drei unabhängigen, infinitesimalen Transformationen

$$p, q, yp - xq.$$

Die allgemeine Transformation der Gruppe ist also

$$X(f) = (e_1 - e_3 y) \frac{\partial f}{\partial x} (e_2 + e_3 x) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

*) Lie, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab Bd. 3, Christiania, 1878 und Bd. 8, 1883; Christiania Videnskabselskabs Forhandling, 1883, Nr. 12.

Durch einmalige Differentiation der Gleichungen

$$\xi = e_1 - e_3 y, \quad \eta = e_2 + e_3 x$$

bekommen wir die Werte

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -e_3, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = e_3, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Das System der Definitionsgleichungen der Gruppe entsteht also aus den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem ist ferner unbeschränkt integrabel, da keine neue Gleichung nullter oder erster Ordnung sich vermittelst weiterer Differentiation und Combination dieser drei erhalten lässt.

Ferner ist es leicht zu verificiren, dass aus zwei Lösungssystemen $\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2$ immer ein drittes System von der erwähnten Form ableitbar ist.

Lie hat viele Gruppen in seinen Abhandlungen »Ueber unendliche Gruppen« discutirt. Natürlich ist es unmöglich, die ganze Menge von Transformationsgruppen in dieser Weise zu erschöpfen. Da es gewisse Normalformen giebt, denen alle Gruppen einer gegebenen n -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ähnlich sind, so sind alle Gruppen der betreffenden Mannigfaltigkeit durch Berechnung der Definitionsgleichungen dieser Normalformen in einem gewissen Sinne bestimmt.

In seiner Habilitationsschrift hat Engel eine allgemeinere Methode aufgestellt, die von ihm und Lie entwickelt und angewendet wurde. Lie hat auch bewiesen, dass diese Methode die Definitionsgleichungen aller Gruppen liefert*). Engel hat später einen neuen Beweis dafür gegeben, und die Methode in seinen Vorlesungen dargestellt**). Vermittelst dieser Methode erhält man nicht nur die Definitionsgleichungen der Normalformen, sondern die allgemeine

*) Lie, Archiv for Math. og Nat. 1878 und 1883; Christ. Forh. 1883; Leipziger Berichte Bd. 43, 1891.

**) Engel, »Über die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen«, Habilitationsschrift Leipzig 1885; Math. Ann. Bd. 27, 1886; Leipziger Berichte Bd. 46, 1894, S. 25—29.

Form der Definitionsgleichungen von allen mit diesen Normalformen oder Typen ähnlichen Gruppen. Man bekommt dann durch Specialisierung die Definitionsgleichungen irgend einer vorgelegten Gruppe.

Die Methode, welche ich in der vorliegenden Arbeit zu der Berechnung der Definitionsgleichungen aller endlichen continuirlichen Gruppen von infinitesimalen Punkttransformationen in der Ebene anwende, ist kurz die folgende:

Vorgelegt seien

$$X_k f = \xi_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \quad (k = 1, \dots, \varrho)$$

die infinitesimalen Transformationen einer ϱ -gliedrigen Gruppe. Dann ist

$$\bar{X}f = \sum_1^{\varrho} \mathbf{e}_k X_k f$$

die allgemeine Transformation der Gruppe, und also

$$\bar{\xi} = \sum_1^{\varrho} \mathbf{e}_k \xi_k, \quad \bar{\eta} = \sum_1^{\varrho} \mathbf{e}_k \eta_k.$$

Bilden wir nun alle partiellen Ableitungen der $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ nach x und y bis zu einer genügend hohen Ordnung, so haben wir n_0 Grössen nullter Ordnung ($\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ selbst), n_1 Grössen erster Ordnung, n_2 Grössen zweiter Ordnung, u. s. w. Jetzt können wir etwa m_0 von diesen Grössen nullter Ordnung durch die $n_0 - m_0$ übrigen ausdrücken, dann m_1 der Ableitungen erster Ordnung durch die $n_1 - m_1$ übrigen Grössen erster Ordnung und die von nullter Ordnung, dann m_2 von zweiter Ordnung durch die $n_2 - m_2$ übrigen von zweiter und die von niedrigerer Ordnung, u. s. w. Fahren wir in dieser Weise fort, so werden wir endlich eine solche bestimmte Ordnung s erreichen, dass $m_s = n_s$ ist. Ferner ist immer $m_\sigma = n_\sigma$ für $\sigma \leq s$. Die sämtlichen so gefundenen Relationen sind die verlangten Definitionsgleichungen der Gruppe. Die Grösse s hängt von der Natur und der Zahl der vorgelegten Grössen $\xi_1 \dots \xi_\varrho, \eta_1 \dots \eta_\varrho$ ab, oder, was dasselbe ist, von der Beschaffenheit der allgemeinen Grössen $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ und von der Zahl ϱ , der Anzahl der darin enthaltenen unbestimmten Constanten $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_\varrho$; und zwar ist

$$\sum_0^s (n_h - m_h) = \varrho.$$

Wir kehren nun zu der vorgelegten Gruppe

$$X_k f = \xi_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \quad (k = 1 \dots \varrho)$$

zurück. Betrachten wir jetzt x, y als Functionen zweier neuen Veränderlichen ξ, η , so erweitern wir die Transformation

$$X_k f = 0 \frac{\partial f}{\partial \xi} + 0 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \xi_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \quad (k = 1 \dots \varrho)$$

bis zu der früher gefundenen s -ten Ordnung mittelst der Formel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (z_{uv}) &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z_u}{\partial t} \right) \\ (z = x \text{ oder } y, v = \xi \text{ oder } \eta, z_u &= \frac{\partial^{u+v} z}{\partial \xi^u \partial \eta^v}). \end{aligned}$$

In gewöhnlicher Weise bekommen wir alle unabhängigen Invarianten dieser Gruppe bis zur s -ten Ordnung als Lösungen des entsprechenden Systems partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Es seien $I_1 \dots I_l$ die sämtlichen unabhängigen Invarianten. Bei Einführung neuer Veränderlichen vermöge irgend einer Transformation geht die Gruppe Xf in eine mit ihr ähnliche Gruppe über, und zu gleicher Zeit das Invariantensystem $I_1 \dots I_l$ in das Invariantensystem $I'_1 \dots I'_l$ dieser neuen Gruppe. Wählen wir die ganz beliebige Transformation

$$Xf = \xi(\xi, \eta) \frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta(\xi, \eta) \frac{\partial f}{\partial \eta} + 0 \frac{\partial f}{\partial x} + 0 \frac{\partial f}{\partial y},$$

die x und y gar nicht ändert, und erweitern wir dieselbe durch die Formel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (z_{uv}) &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z_u}{\partial t} \right) - z_{u\xi} \frac{\partial \xi}{\partial v} - z_{u\eta} \frac{\partial \eta}{\partial v} \\ [z = x \text{ oder } y, v = \xi \text{ oder } \eta, u &= \xi^{(u)} \eta^{(v)}] \end{aligned}$$

bis zur s -ten Ordnung, so stellen Gleichungen von der Form

$$[\mathcal{X}^{(s)}(I_k)]_{\alpha_k = \alpha_k} = \mathcal{X}^{(s)}(\alpha_k) \quad (k = 1 \dots l),$$

wo $\alpha_1 \dots \alpha_l$ Functionen von ξ, η sind, die gesuchten Definitionsgleichungen aller Gruppen, die mit der vorgelegten Gruppe ähnlich sind, dar.

Da die Ableitung irgend einer Invariante der Gruppe nach ξ oder η wieder eine Invariante ist, so brauchen wir nicht alle Invarianten, sondern nur eine gewisse kleine Zahl davon wirklich durch

Integration zu finden; alle übrigen lassen sich durch bloße Differentiation dieser bestimmen. Diese nur durch Integration bestimmten Invarianten nennen wir die wesentlichen Invarianten.

Die erhaltenen Differentialgleichungen bilden ein unbeschränkt integrables System dann und nur dann, wenn sich durch Differentiation nach ξ und η und Elimination der höheren Ableitungen keine neue Differentialgleichung derselben oder geringerer Ordnung bilden lässt. Ist das System nicht unbeschränkt integrabel, so müssen wir durch die angedeuteten Operationen dasselbe vervollständigen. Differentiieren wir dann noch einmal nach ξ , η , so müssen diese neuen Gleichungen eine Folge des Systems selbst sein. Eliminieren wir daraus alle möglichen Ableitungen der ξ , η , so müssen die Coefficienten aller noch vorhandenen Ableitungen der ξ , η verschwinden. Die so gefundenen Relationen

$$\varphi(\alpha_1 \dots \alpha_l, \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \dots) = 0$$

bilden die Integrabilitätsbedingungen, welche zusammen mit den Definitionsgleichungen die verlangte Aufgabe vollständig erledigen.

Die ganze Methode besteht also aus den folgenden Teilprocessen, und die Resultate der Ausführung derselben auf die verschiedenen Typen sind in den nachfolgenden Paragraphen zusammengestellt.

A. Die Bestimmung der Ordnungszahl s der nötigen Erweiterung von den Transformationen des vorgelegten Typus, sowie der Gesamtzahl T der unabhängigen Invarianten, § V.

B. Die Bestimmung der Zahl der wesentlichen Invarianten jeder Ordnung, § VI.

C. Die Berechnung dieser Invarianten durch Auflösung des entsprechenden Systems partieller Differentialgleichungen, § VII.

D. Die Ausrechnung der Zuwächse dieser Invarianten bei der beliebigen Transformation $\mathfrak{X}f$, und das Ausdrücken derselben durch die Invarianten allein, § VII.

E. Die Bestimmung der gesuchten Definitionsgleichungen durch die Formel

$$[\mathfrak{X}^{(s)}(I_k)]_{\alpha_k} = \alpha_k = \mathfrak{X}^{(s)}(\alpha_k) \quad (k = 1 \dots l),$$

§ VII.

F. Die Untersuchung über die Integrabilität dieser Systeme von Differentialgleichungen, und die Berechnung der Integrabilitätsbedingungen, § VII.

In § IV findet man die von Lie aufgestellte Tabelle der sämtlichen Typen von Punktransformationen in der Ebene.

Da das Verfahren für alle Typen genau dasselbe ist, habe ich es für nötig erachtet, die ganze Ausrechnung nur für zwei vorbildliche Fälle ausführlich zu geben. Für die übrigen Fälle genügt es, die Resultate mit passenden Anmerkungen zu geben.

Ich habe die unter F. erwähnte Untersuchung nicht für alle Typen vollständig ausgeführt.

§ II.

Vorbemerkungen.

Es war nicht leicht, ein einfaches Bezeichnungssystem zu wählen. Ich hoffe nur, dass meine Abkürzungen die Klarheit nicht stören mögen. Die meisten Symbole habe ich an den betreffenden Stellen definiert, einige allgemeinere Symbole aber stelle ich in diesem Paragraphen zusammen. Zu gleicher Zeit gebe ich hier gewisse wichtige Beziehungen und Formeln.

In der ganzen Ausrechnung kommen die Potenzen sehr selten in Betracht. In der That sind r und c die einzigen Buchstaben, die als Exponenten vorkommen. In den Paragraphen III, VII sollen demnach die oberen, bez. unteren Striche in Verbindung mit lateinischen oder griechischen Buchstaben überall partielle Ableitungen nach x bez. y andeuten. In Verbindung mit deutschen Buchstaben, die immer Hilfsgrößen darstellen, und die gleich danach definiert werden, sollen die oberen und unteren Striche nur als Unterscheidungszeichen dienen.

Ferner bedeuten x_r^{u-v} , ξ_r^σ , p_n^{m-n} , bez. q_k^i , $\frac{\partial^u x}{\partial x^{u-v} \partial y^v}$, $\frac{\partial^{\sigma+\tau} \xi}{\partial x^\sigma \partial y^\tau}$,
 $\frac{\partial f}{\partial x_n^{m-n}}$, $\frac{\partial f}{\partial y_k^i}$, $\binom{m}{i} \equiv \frac{m!}{i! (m-i)!}$.

Da die Veränderlichen x , y in § V gar nicht vorkommen, so können wir in jenem Paragraphen schreiben

$$\xi^{(r+1)} \text{ für } \frac{\partial^{r+1} \xi}{\partial x^{r+1}}$$

Bezeichnen wir mit m die betrachtete Ordnungszahl der Erweiterung von den Transformationen einer Gruppe, mit G_m die Zahl der unabhängigen Gleichungen nullter bis m -ter Ordnung des Systems, nachdem wir dasselbe durch lineare Combination seiner Gleichungen auf die möglichst einfache Form gebracht haben, mit V_m die Anzahl

der Variablen nullter bis m -ter Ordnung, mit T_m die Gesamtzahl der unabhängigen Invarianten nullter bis m -ter Ordnung, mit I_m die Zahl der unabhängigen Invarianten m -ter Ordnung, aus denen sich keine Invariante von niedrigerer Ordnung zusammensetzen lässt, mit D_m die Zahl der Invarianten m -ter Ordnung, die sich durch Differentiation bestimmen lassen und endlich mit W_m die Zahl der wesentlichen Invarianten m -ter Ordnung, so bestehen die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} V_m &= (m+1)(m+2) \\ T_m &= V_m - G_m \\ I_m &= T_m - T_{m-1} \\ W_m &= I_m - D_m. \end{aligned}$$

Bedeutet ferner s die Ordnungszahl der nötigen Erweiterung, ϱ die Gliederzahl der Gruppe, so ergeben sich auch

$$\begin{aligned} G_s &= \varrho \\ T_s &= (s+1)(s+2) - \varrho. \end{aligned}$$

Erweitern wir die oft vorkommende Transformation $x^r q$ s -mal vermittelst der Formel

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} (x_{uv}) &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\delta x_u}{\delta t} \right) \\ \left[x = x \text{ oder } y, v = x \text{ oder } y, x_u = \frac{\partial^{u+v} x}{\partial x^u \partial y^v} \right], \end{aligned}$$

so bekommen wir

$$Wf = x^r q + \sum_1^s m \sum_0^n \frac{\delta^m (x^r)}{\delta x^{m-n} \delta y^n} q_n^{m-n}.$$

Wenn wir diese Glieder nach den Potenzen von x ordnen und gruppieren, so erhalten wir

$$Wf = x^r q + \sum_1^r \binom{r}{t} (t)! x^{r-t} U_t,$$

wo U_t bedeutet

$$\begin{aligned} U_t &\equiv \frac{1}{t!} \sum_t^s m \sum_0^n \sum_{t-1}^{m-1} m_1 \sum_{t-2}^{m_1-1} m_2 \sum_0^{n_2} \dots \sum_1^{m_{t-2}-1} \sum_0^{n_{t-1}} \binom{m-n}{m_1-n_1} \binom{m_1-n_1}{m_2-n_2} \dots \\ &\dots \binom{m_{t-2}-n_{t-2}}{m_{t-1}-n_{t-1}} \binom{n}{n_1} \binom{n_1}{n_2} \dots \binom{n_{t-1}}{n_{t-1}} x_{n-n_1}^{(m-n)-(m_1-n_1)} x_{n_1-n_2}^{(m_1-n_1)-(m_2-n_2)} \dots \\ &\dots x_{n_{t-2}-n_{t-1}}^{(m_{t-2}-n_{t-2})-(m_{t-1}-n_{t-1})} x_{n_{t-1}}^{m_{t-1}-n_{t-1}} q_n^{m-n}. \end{aligned}$$

Wenn wir die Transformation

$$\mathfrak{X}f = \xi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + 0 \frac{\partial f}{\partial x} + 0 \frac{\partial f}{\partial y}$$

vermittels der gewöhnlichen Formel

$$\frac{\partial x_{uv}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x_u}{\partial t} \right) - x_{u\mathfrak{x}} \frac{\partial \xi}{\partial v} - x_{u\mathfrak{y}} \frac{\partial \eta}{\partial v}$$

$$\left[x = x \text{ oder } y, v = \mathfrak{x} \text{ oder } \mathfrak{y}, x_u = \frac{\partial^{u+v} x}{\partial \mathfrak{x}^u \partial \mathfrak{y}^v} \right]$$

erweitern, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^{(s)} f &= \xi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + 0 \frac{\partial f}{\partial x} + 0 \frac{\partial f}{\partial y} - \\ &- \sum_1^s \sum_0^m \left\{ \left[\sum_0^{m-n} \sum_0^n \binom{m-n}{i} \binom{n}{k} (x_k^{i+1} \xi_{n-k}^{m-n-i} + x_{k+1}^i \eta_{n-k}^{m-n-i}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (x_n^{m-n+1} \xi + x_{n+1}^{m-n} \eta) \right] p_n^{m-n} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_0^{m-n} \sum_0^n \binom{m-n}{i} \binom{n}{k} (y_k^{i+1} \xi_{n-k}^{m-n-i} + y_{k+1}^i \eta_{n-k}^{m-n-i}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (y_n^{m-n+1} \xi + y_{n+1}^{m-n} \eta) \right] q_n^{m-n} \right\}. \end{aligned}$$

Um dasselbe zu beweisen nehmen wir an, dass es für $m = m$, $n = n$ gilt, sodass, zum Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_n^{m-n}}{\partial t} &= - \sum_0^{m-n} \sum_0^n \binom{m-n}{i} \binom{n}{k} [x_k^{i+1} \xi_{n-k}^{m-n-i} + x_{k+1}^i \eta_{n-k}^{m-n-i}] + \\ &\quad + (x_n^{m-n+1} \xi + x_{n+1}^{m-n} \eta). \end{aligned}$$

Wenden wir jetzt die oben gegebene Erweiterungsformel noch einmal an, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_n^{m-n+1}}{\partial t} &= - \sum_0^{m-n} \sum_0^n \binom{m-n}{i} \binom{n}{k} [x_k^{i+1} \xi_{n-k}^{m-n-i+1} + x_{k+1}^i \eta_{n-k}^{m-n-i+1} + \\ &\quad + x_k^{i+2} \xi_{n-k}^{m-n-i} + x_{k+1}^{i+1} \eta_{n-k}^{m-n-i}] + \\ &\quad + (x_n^{m-n+1} \xi' + x_{n+1}^{m-n} \eta' + x_n^{m-n+2} \xi + x_{n+2}^{m-n+1} \eta) - \\ &\quad - (x_n^{m-n+1} \xi' + x_{n+1}^{m-n} \eta') \\ &= - \sum_0^{m-n+1} \sum_0^n \binom{m-n+1}{i} \binom{n}{k} [x_k^{i+1} \xi_{n-k}^{m-n-i+1} + x_{k+1}^i \eta_{n-k}^{m-n-i+1}] + \\ &\quad + (x_n^{m-n+2} \xi + x_{n+1}^{m-n+1} \eta). \end{aligned}$$

Dies stimmt genau mit dem Resultat überein, das wir bekommen, wenn wir in der betrachteten Formel m durch $m + 1$ ersetzen.

Da es leicht zu ersehen ist, dass die Formel für $m = 1, 2, 3$ gilt, so muss sie für alle Werte von m gelten.

Hier habe ich nur einen der vier Fälle betrachtet. Die drei übrigen lassen sich in genau derselben Weise erledigen.

Ist φ irgend eine Function der x, y und ihrer Ableitungen, so haben wir die wichtige Formel

$$\mathfrak{X} \varphi_v^{\mu-\nu} = (\mathfrak{X} \varphi)_v^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu} i \sum_0^v k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} [\varphi_{k+1}^{i+1} \xi_{v-k}^{\mu-\nu-i} + \varphi_{k+1}^i \eta_{v-k}^{\mu-\nu-i}] + \\ + (\varphi_v^{\mu-\nu+1} \xi + \varphi_{v+1}^{\mu-\nu} \eta).$$

Um dieselbe zu beweisen, nehmen wir an, dass sie für $\mu = \mu, \nu = \nu$ gilt. Führen wir jetzt die Erweiterungsformel

$$\frac{\partial x_{uv}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x_u}{\partial t} \right) - x_{u\xi} \frac{\partial \xi}{\partial v} - x_{u\eta} \frac{\partial \eta}{\partial v}$$

$$[x = x \text{ oder } y, v = \xi \text{ oder } \eta, u = \xi^{(m)} \eta^{(n)}]$$

für den Fall $x_u = \varphi_v^{\mu-\nu}, v = \eta$ aus, so bekommen wir

$$\mathfrak{X} \varphi_{v+1}^{\mu-\nu} = (\mathfrak{X} \varphi)_{v+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu} i \sum_0^v k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} [\varphi_{k+1}^{i+1} \xi_{v-k+1}^{\mu-\nu-i} + \varphi_{k+1}^i \eta_{v-k+1}^{\mu-\nu-i}] - \\ - \sum_0^{\mu-\nu} i \sum_0^v k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} [\varphi_{k+1}^{i+1} \xi_{v-k}^{\mu-\nu-i} + \varphi_{k+2}^i \eta_{v-k}^{\mu-\nu-i}] + \\ + (\varphi_v^{\mu-\nu+1} \xi + \varphi_{v+1}^{\mu-\nu} \eta + \varphi_{v+1}^{\mu-\nu+1} \xi + \varphi_{v+2}^{\mu-\nu} \eta) - (\varphi_v^{\mu-\nu+1} \xi + \varphi_{v+1}^{\mu-\nu} \eta).$$

Setzen wir $i, = i, k_i = k - 1$, so stimmen die unteren und oberen Striche in dem dritten Glied der rechten Seite mit den in dem zweiten Glied. Setzen wir ferner fest, dass

$$\binom{\nu}{k}_{k=v+1} \equiv 0, \quad \binom{\nu}{k-1}_{k=0} \equiv 0$$

sein soll, so können wir die Grenzen umformen und die beiden Glieder zusammen schreiben

$$- \sum_0^{\mu-\nu} i \sum_0^{v+1} k \binom{\mu-\nu}{i} \left\{ \binom{\nu}{k} + \binom{\nu}{k-1} \right\} [\varphi_{k+1}^{i+1} \xi_{v-k+1}^{\mu-\nu-i} + \varphi_{k+1}^i \eta_{v-k+1}^{\mu-\nu-i}].$$

Wir finden aber

$$\binom{\nu}{k} + \binom{\nu}{k-1} = \binom{\nu+1}{k}.$$

Die Formel reducirt sich also auf die Form

$$\mathfrak{X} \varphi_{\nu+1}^{\mu-\nu} = (\mathfrak{X} \varphi)_{\nu+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_k^{\nu+1} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu+1}{k} [\varphi_k^{i+1} \xi_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} + \varphi_{k+1}^i \eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i}] + (\varphi_{\nu+1}^{\mu-\nu-i} \xi + \varphi_{\nu+2}^{\mu-\nu} \eta).$$

Wir erhalten genau dieselbe, wenn wir in der ursprünglichen Formel μ bez. ν durch $\mu + 1$, bez. $\nu + 1$ ersetzen.

Da die Formel sich leicht für $\mu, \nu = 1, 2, 3$ verificiren lässt, so muss sie für alle Werte von μ, ν gelten.

§ III.

Ausführliche Behandlung der Typen 1.) und 8.).

Als erstes Beispiel, um die Methode der Auflösung ausführlich zu zeigen, nehmen wir den ersten Typus, der die allgemeine projective Gruppe der Ebene darstellt. Die Gruppe ist achtegliedrig und besteht aus den unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$p, q, xq, xp - yq, yp, xp + yq, x^2p + xyq, xyp + y^2q.$$

A. Die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe ist $Xf = (e_1 + e_3x + e_4y + e_7x^2 + e_8xy)p + (e_2 + e_5x + e_6y + e_7xy + e_8y^2)q$.

Wir haben also die zwei Grössen nullter Ordnung

$$\bar{\xi} = e_1 + e_3x + e_4y + e_7x^2 + e_8xy \\ \bar{\eta} = e_2 + e_5x + e_6y + e_7xy + e_8y^2,$$

und keine von ihnen ist bestimmt. Einmalige Differentiation nach x, y liefert die vier Grössen

$$\bar{\xi}' = e_3 + 2e_7x + e_8y \\ \bar{\xi}_1' = e_4 + e_8x \\ \bar{\eta}' = e_5 + e_7y \\ \bar{\eta}_1' = e_6 + e_7x + 2e_8y,$$

und wieder ist keine durch die übrigen bestimmt. Differentiiren wir noch einmal, so bekommen wir die sechs Grössen

$$\bar{\xi}'' = 2e_7, \quad \bar{\xi}_1'' = e_8, \quad \bar{\xi}_{11}'' = 0, \\ \bar{\eta}'' = 0, \quad \bar{\eta}_1'' = e_7, \quad \bar{\eta}_{11}'' = 2e_8,$$

und mittelst Elimination der unbestimmten Constanten e_7, e_8 lassen sich vier von den Grössen durch die anderen zwei bestimmen. Die dritte Differentiation liefert die acht Grössen $\xi''' \dots \bar{\eta}_m$, die sämtlich den Wert Null besitzen, sowie alle höheren Ableitungen. Die Ordnungszahl s der nötigen Erweiterung hat also den Wert 3.

Wir sehen aber, dass es möglich ist, aus den erhaltenen Gleichungen zweiter Ordnung alle unbestimmten Constanten fortzuschaffen. Also können wir ruhig für s statt drei den geringeren Wert zwei nehmen. Der nächste Schritt zeigt ferner, dass die sämtlichen wesentlichen Invarianten von der zweiten Ordnung sind, welche dieselbe Verminderung der Zahl s liefert. Genau dieselbe Verkleinerung tritt in den Fällen der Typen 4, 16, 20, 25, 28 ein. Es ist merkwürdig, dass wir gerade für diese sechs Typen die Integrabilitätsbedingungen nur nach zweimaliger Differentiation der Definitionsgleichungen erhalten.

B. Erweitern wir die acht Transformationen zweimal, und setzen wir die erweiterten Transformationen gleich Null, so bekommen wir die folgenden acht partiellen Differentialgleichungen:

$$p = 0$$

$$q = 0$$

$$yp + y'p' + y,p + y''p'' + y'p' + y,,p,, = 0$$

$$xp - yq + x'p' + x,p - y'q' - y,q + x''p'' + x'p' + x,,p,, - y''q'' - y'q' - y,,q,, = 0$$

$$xq + x'q' + x,q + x''q'' + x'q' + x,,q,, = 0$$

$$xp + yq + x'p' + x,p + y'q' + y,q + x''p'' + x'p' + x,,p,, + y''q'' + y'q' + y,,q,, = 0$$

$$x^2p + xyq + 2xx'p' + 2xx,p + (xy' + yx')q' + (xy, + yx,)q + 2(xx'' + x'^2)p'' + 2(xx' + x'x,)p' + 2(xx,, + x'^2)p,, + (xy'' + yx'' + 2x'y')q'' + (xy' + yx' + x'y, + y'x,)q' + (xy,, + yx,, + 2x,y,)q,, = 0$$

$$xyp + y^2q + (xy' + yx')p' + (xy, + yx,)p + 2yy'q' + 2yy,q + (xy'' + yx'' + 2x'y')p'' + (xy' + yx' + x'y, + y'x,)p' + (xy,, + yx,, + 2x,y,)p,, + 2(yy'' + y'^2)q'' + 2(yy' + y'y,)q' + 2(yy,, + y'^2)q,, = 0.$$

Durch Combination reduciren sich diese leicht auf die folgenden:

$$p = 0$$

$$q = 0$$

$$y'p' + y,p + y''p'' + y'p' + y,,p,, = 0$$

$$x'p' + x,p + x''p'' + x'p' + x,,p,, = 0$$

$$\begin{aligned}x'q' + x,q + x''q'' + x'q' + x,q'' &= 0 \\y'q' + y,q + y''q'' + y'q' + y,q'' &= 0 \\2x'p'' + 2x'x,p' + 2x,x,p'' + 2x'y'q'' + (x'y + y'x)q' + 2x,y,q'' &= 0 \\2x'y'p'' + (x'y + y'x)p' + 2x,y,p'' + 2y^2q'' + 2y'y,q' + 2y,y,q'' &= 0.\end{aligned}$$

Dann haben wir zwei Gleichungen zwischen den zwei Grössen nullter Ordnung, also keine Lösung; sechs Gleichungen zwischen den sechs Grössen nullter und erster Ordnung, also wieder keine Lösung; acht Gleichungen zwischen den zwölf Grössen nullter, erster und zweiter Ordnung, also vier Lösungen. Für die nullte bis dritte Ordnung incl. haben wir acht Gleichungen und zwanzig Grössen, also zwölf Lösungen, vier von zweiter und acht von dritter Ordnung. Die letzteren lassen sich sämtlich durch Differentiation der ersteren nach ξ, η finden. Dasselbe geschieht für alle höheren Ordnungen.

C. Die Integration des reducirten Systems führen wir in gewöhnlicher Weise aus und bekommen die vier gemeinsamen Lösungen

$$\begin{aligned}B &= \frac{x'y'' - y'x''}{x'y - y'x}, & \Phi &= \frac{2(x'y' - y'x') + (x,y'' - y,x'')}{x'y - y'x}, \\ \Psi &= \frac{(x'y'' - y'x'') + 2(x,y' - y,x')}{x'y - y'x}, & \Theta &= \frac{x,y'' - y,x''}{x'y - y'x},\end{aligned}$$

die das Invariantensystem der vorgelegten Gruppe bilden.

D. Wenn wir auf diese die zweimal erweiterte, ganz beliebige Transformation

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}f &= \xi p + \eta q - (x'\xi' + x,\eta')p' - (x'\xi + x,\eta)p - (y'\xi' + y,\eta')q' - \\ &\quad - (y'\xi + y,\eta)q - (x'\xi'' + x,\eta'' + 2x''\xi' + 2x',\eta')p'' - \\ &\quad - (x'\xi' + x,\eta' + x'\xi + x'',\eta + x,\eta' + x',\eta)p' - (x'\xi'' + \\ &\quad + x,\eta'' + 2x'\xi + 2x,\eta)p'' - (y'\xi'' + y,\eta'' + 2y''\xi' + \\ &\quad + 2y',\eta')q'' - (y'\xi' + y,\eta' + y'\xi + y'',\eta + y,\eta' + y',\eta)q' - \\ &\quad - (y'\xi'' + y,\eta'' + 2y'\xi + 2y,\eta)q''\end{aligned}$$

ausführen, so ergeben sich die entsprechenden Zuwüchse

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}B &= -\eta'' - 2B\xi' - \Phi\eta' + B\eta, \\ \mathfrak{X}\Phi &= \xi'' - 2\eta' - \Phi\xi' - 3B\xi - 2\Psi\eta' \\ \mathfrak{X}\Psi &= 2\xi' - \eta'' - 2\Phi\xi - 3\Theta\eta' - \Psi\eta, \\ \mathfrak{X}\Theta &= \xi'' + \Theta\xi' - \Psi\xi - 2\Theta\eta.\end{aligned}$$

E. Vermittelst der angedeuteten Formel erhalten wir dann die verlangten Definitionsgleichungen

$$\begin{aligned}\eta'' + 2\beta\xi' + \varphi\eta' - \beta\eta, + \beta'\xi + \beta, \eta &= 0 \\ 2\eta'_1 - \xi'' + \varphi\xi' + 3\beta\xi, + 2\psi\eta' + \varphi'\xi + \varphi, \eta &= 0 \\ \eta'' - 2\xi'_1 + 2\varphi\xi, + 3\theta\eta' + \psi\eta, + \psi'\xi + \psi, \eta &= 0 \\ \xi'' + \theta\xi' - \psi\xi, - 2\theta\eta, - \theta'\xi - \theta, \eta &= 0.\end{aligned}$$

F. Da es nur vier Gleichungen für die sechs Ableitungen zweiter Ordnung $\xi'' \dots \eta''$ giebt, so sehen wir, dass das System nicht ohne Weiteres unbeschränkt integrabel ist. Durch einmalige Differentiation wird es vervollständigt. Differentiiren wir diese Gleichungen noch einmal, und eliminiren wir aus allen vorhandenen Gleichungen die Grössen $\xi^{iv} \dots \eta^{iv}$, $\xi''' \dots \eta'''$ und $\xi'' \dots \eta''$ bis auf zwei, so müssen die Coefficienten der beiden übrigen Ableitungen zweiter Ordnung, aller Ableitungen erster Ordnung und die von ξ und η verschwinden. Die Elimination lässt sich in doppelter Weise vollziehen, nämlich, wenn wir die Definitionsgleichungen mit den Nummern (1), (2), (3), (4) bezeichnen,

$$\begin{aligned}3(1)'' - 2(2)' + 1(3)'' - 3\theta(1)' + 3\psi(1), - 2\varphi(2), + \varphi(3)' + \\ + 3\beta(3), + 6\beta(4)' + (3\psi, - 6\theta')(1) + (\psi' - 2\varphi,)(2) + 3\beta, (3) + \\ + 3\alpha'(4) \equiv 11(2\xi' + \eta,) + 3\eta' + 11\xi + 11, \eta = 0, \\ (2)'' - 2(3)' - 3(4)'' + 6\theta(1), - 3\theta(2)' - \psi(2), + 2\psi(3)' + 3\varphi(4)' - \\ - 3\beta(4), + 3\theta, (1) - 3\theta'(2) + (2\psi' - \varphi,)(3) - \\ - (6\beta, - 3\varphi')(4) \equiv 11\xi, + 3(\xi' + 2\eta,) + 3'\xi + 3, \eta = 0,\end{aligned}$$

wo 11 und 3 die Werte besitzen

$$\begin{aligned}11 &= 3\beta, - 2\varphi' + \psi'' + 3\beta\psi, + 3\psi\beta, - 6\beta\theta' - 3\theta\beta' - 2\varphi\varphi, + \varphi\psi' \\ 3 &= \varphi, - 2\psi' + 3\theta'' + 3\beta\theta, + 6\theta\beta, - 3\varphi\theta' - 3\theta\varphi' - \psi\varphi, + 2\psi\psi' .\end{aligned}$$

$11 = 0$ und $3 = 0$ sind also die Integrabilitätsbedingungen.

In seiner Habilitationsschrift S. 53—57 hat Engel die Definitionsgleichungen dieser Gruppe berechnet, wobei er beachtet, dass sie den zweiten Typus, die allgemeine lineare Gruppe als Untergruppe enthält. Nachdem er die Definitionsgleichungen der letzteren gefunden hat, bekommt er ein System von Differentialgleichungen (Gl. 12, S. 57) für die darin vorhandenen Grössen $\beta_x, \beta_y, \varepsilon_x, \varepsilon_y$. Differentiiren wir diese Gleichungen nach x, y , so erhalten wir zwei Integrabilitätsbedingungen, welche mit unseren eben gefundenen übereinstimmen.

Wir betrachten als zweites Beispiel Typus 8, der $(r+4)$ -gliedrig ist, und aus den unabhängigen Transformationen

$$q, xq, \dots x^r q, yq, p, xp$$

entsteht.

A. Die allgemeine Transformation der Gruppe ist

$$Xf = (e_1 + e_2x)p + (e_3y + c_0 + c_1x + \dots + c_rx^r)q.$$

Wir haben also die zwei Grössen nullter Ordnung

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= e_1 + e_2x \\ \bar{\eta} &= e_1y + c_0 + c_1x + \dots + c_rx^r,\end{aligned}$$

von denen keine bestimmt ist. Einmalige Differentiation nach x, y giebt

$$\begin{aligned}\bar{\xi}' &= e_2, \quad \bar{\xi}'' = 0, \quad \bar{\eta}' = e_3, \\ \bar{\eta}'' &= c_1 + 2c_2x + \dots + rc_rx^{r-1},\end{aligned}$$

wovon eine bestimmt ist. Ferner bekommen wir

$$\begin{aligned}\bar{\xi}'' &= \bar{\xi}', \quad \bar{\xi}'' = \bar{\eta}'' = \bar{\eta}' = 0, \\ \bar{\eta}'' &= 2c_2 + 6c_3x + \dots + r(r-1)c_rx^{r-2},\end{aligned}$$

wo also fünf bestimmt sind. Für $1 < k < r + 1$ finden wir immer $2(k+1) - 1$ Grössen k -ter Ordnung bestimmt. Da endlich $\bar{\eta}^{(r+1)} = 0$ ist, so verschwinden alle $2(r+2)$ Grössen $(r+1)$ -ter Ordnung. Die Ordnungszahl ist also $s = r + 1$.

B. Die $r + 4$ Transformationen der Gruppe $(r + 1)$ -mal erweitert und gleich Null gesetzt bilden das System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}q &= 0 \\ xq + U_1 &= 0 \\ x^2q + 2xU_1 + 2U_2 &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ x^r q + rx^{r-1}U_1 + r(r-1)x^{r-2}U_2 + \dots + r! \cdot U_r &= 0 \\ yq + y'q' + y,q, + \dots + y_{r+1}q_{r+1} &= 0 \\ p &= 0 \\ xp + x'p' + x,p, + \dots + x_{r+1}p_{r+1} &= 0,\end{aligned}$$

wo U_t bedeutet

$$\begin{aligned}U_t &\equiv \frac{1}{t!} \sum_i^{r+1} \sum_n^m \sum_{i-1}^{m-1} \sum_{n_1}^{m_1} \sum_{i-2}^{m_1-1} \sum_{n_2}^{m_2} \sum_{n_2}^{m_2} \dots \sum_1^{m_{t-2}-1} \sum_{n_{t-1}}^{m_{t-1}} \binom{m-n}{m_1-n_1} \binom{m_1-n_1}{m_2-n_2} \dots \\ &\dots \binom{m_{t-2}-n_{t-2}}{m_{t-1}-n_{t-1}} \binom{n}{n_1} \binom{n_1}{n_2} \dots \binom{n_{t-2}}{n_{t-1}} x_{n-n_1}^{(m-n)-(m_1-n_1)} x_{n_1-n_2}^{(m_1-n_1)-(m_2-n_2)} \dots \\ &\dots x_{n_{t-2}-n_{t-1}}^{(m_{t-2}-n_{t-2})-(m_{t-1}-n_{t-1})} x_{n_{t-1}}^{m_{t-1}-n_{t-1}} q_n^{m-n}.\end{aligned}$$

Dasselbe reducirt sich durch Combination auf das folgende:

$$\begin{aligned} q &= 0 \\ U_1 &= 0 \\ U_2 &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ U_r &= 0 \\ y'q' + y.q + \dots + y_{r+1}q_{r+1} &= 0 \\ p &= 0 \\ x'p' + x.p + \dots + x_{r+1}p_{r+1} &= 0. \end{aligned}$$

Hier haben wir zwei Gleichungen für die zwei Grössen nullter Ordnung, also keine Invariante nullter Ordnung; fünf Gleichungen für die sechs Grössen nullter und erster Ordnung, also eine wesentliche Invariante erster Ordnung; sechs Gleichungen für die 12 Grössen nullter bis zweiter Ordnung, also sechs Invarianten. Von den fünf Invarianten zweiter Ordnung sind zwei durch Differentiation aus der vorhergefundenen bestimmt, während es drei wesentliche Invarianten zweiter Ordnung giebt.

Ferner bekommen wir für $2 < k < r + 1$, $k + 4$ Gleichungen für die $(k + 1)(k + 2)$ Grössen nullter bis k -ter Ordnung, also $k^2 + 2k - 2$ Invarianten nullter bis k -ter Ordnung incl. Die $2k + 1$ Invarianten k -ter Ordnung lassen sich sämtlich durch Differentiation aus den vier schon gefundenen wesentlichen Invarianten bestimmen. Es giebt also keine neue Invariante dritter bis r -ter Ordnung incl. Wir finden aber $2r + 4$ Invarianten $(r + 1)$ -ter Ordnung, von denen sich nur $2r + 3$ durch Differentiation bestimmen lassen; also giebt es eine wesentliche Invariante $(r + 1)$ -ter Ordnung. Da keine weitere wesentliche Invariante auftritt, so besitzt die Gruppe nur diese fünf wesentlichen Invarianten, eine von erster, drei von zweiter und eine von $(r + 1)$ -ter Ordnung.

C. Wir haben in A. und B. schon gesehen, dass dieser Typus eine Invariante erster Ordnung, drei wesentliche Invarianten zweiter Ordnung und eine wesentliche Invariante $(r + 1)$ -ter Ordnung besitzt. Um die Invarianten erster und zweiter Ordnung zu bestimmen, brauchen wir nur das reducirte System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 p &= 0 \\
 q &= 0 \\
 x'p' + x_p + \dots + x_n p_n &= 0 \\
 y'q' + y_q + \dots + y_n q_n &= 0 \\
 x'q' + x_q + \dots + x_n q_n &= 0 \\
 x'^2 q'' + x'x_q' + x_i^2 q_{ii} &= 0
 \end{aligned}$$

zu betrachten, da alle weiteren Glieder dieser Gleichungen, sowie alle weiteren Gleichungen dieses Typus von dritter und höherer Ordnung sind. Die beiden ersten Gleichungen zeigen uns, dass x, y selber in den Invarianten nicht vorkommen. Aus den dritten und vierten bekommen wir die Lösungen

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{x_i}{x'}, & b &= \frac{x''}{x'}, & c &= \frac{x'_i}{x'}, & d &= \frac{x_{ii}}{x'}, \\
 a_1 &= \frac{y_i}{y'}, & b_1 &= \frac{y''}{y'}, & c_1 &= \frac{y'_i}{y'}, & d_1 &= \frac{y_{ii}}{y'}.
 \end{aligned}$$

Setzen wir nun diese Grössen als neue Variabeln in die fünfte Gleichung ein, so erhalten wir die Gleichung

$$0 \frac{\partial f}{\partial a} + \dots + 0 \frac{\partial f}{\partial d} + (a - a_1) \frac{\partial f}{\partial a_1} + \dots + (d - d_1) \frac{\partial f}{\partial d_1} = 0.$$

Daraus ergeben sich die Lösungen

$$\begin{aligned}
 a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad B_1 &= \frac{b - b_1}{a - a_1} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'y_i - y'x_i}, \\
 B_2 &= \frac{c - c_1}{a - a_1} = \frac{x'y'_i - y'x'_i}{x'y_i - y'x_i}, \quad B_3 = \frac{d - d_1}{a - a_1} = \frac{x'y_{ii} - y'y_{ii}}{x'y_i - y'x_i}.
 \end{aligned}$$

Führen wir diese als neue Variabeln in die sechste Gleichung ein, so bekommen wir die Gleichung

$$0 \frac{\partial f}{\partial a} + \dots + 0 \frac{\partial f}{\partial d} + \frac{\partial f}{\partial B_1} + a \frac{\partial f}{\partial B_2} + a^2 \frac{\partial f}{\partial B_3} = 0,$$

und die Lösungen

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad C_1 = B_2 - aB_1, \quad C_3 = B_3 - aB_2.$$

Da jede Function der Invarianten allein auch eine Invariante ist, können wir, der Bequemlichkeit wegen, die verlangten wesentlichen Invarianten schreiben

$$\begin{aligned} A &= a = \frac{x}{x'}, & \Gamma &= b = \frac{x''}{x'}, \\ A' &= B_2 - aB_1 + b = (\log(x'y, -y'x_i))' \\ A, &= B_3 - aB_2 + c = (\log(x'y, -y'x_i)), \end{aligned}$$

Die zwei übrigen Invarianten sind

$$A' = c - ab, \quad A, = d - ac.$$

In ähnlicher Weise kommen wir auf die wesentliche Invariante $(r+1)$ -ter Ordnung

$$A = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2'' & \mathfrak{A}_2''' & \dots & \mathfrak{A}_2^{r+1} \\ \mathfrak{A}_3'' & \mathfrak{A}_3''' & \dots & \mathfrak{A}_3^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{A}_r'' & \mathfrak{A}_r''' & \dots & \mathfrak{A}_r^{r+1} \\ \mathfrak{B}'' & \mathfrak{B}''' & \dots & \mathfrak{B}^{r+1} \end{vmatrix}$$

wenn wir nach und nach die Lösungen jeder partiellen Differentialgleichung des ganzen reducirten Systems als neue Variablen in die nächste Gleichung einsetzen. Hier bedeuten \mathfrak{A}_i^m und \mathfrak{B}^m

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_t^m &\equiv \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m}{m_1} \mathfrak{A}_{t-1}^{m_1} \cdot \frac{x^{m-m_1}}{x'} \\ &\equiv \frac{1}{t!} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=2}^{m_1-1} \dots \sum_{k=1}^{m_{t-2}-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \frac{x^{m-m_1}}{x'} \frac{x^{m_1-m_2}}{x'} \dots \\ &\quad \dots \frac{x^{m_{t-2}-m_{t-1}}}{x'} \frac{x^{m_{t-1}}}{x'} \end{aligned}$$

$$\mathfrak{B}^m \equiv \frac{x'y^m - y'x^m}{x'y, -y'x,}.$$

Es ist wohl $\mathfrak{A}_t^m \equiv 0$ für $t > m$, und $\mathfrak{A}_t^m \equiv 1$ für $t = m$.

Es genügt aber nachzuweisen, dass die obenerwähnte Grösse A wirklich eine solche Invariante ist. Offenbar ist A $(r+1)$ -ter Ordnung. Ferner lässt sie sich nicht aus A , Γ , A' und $A,$ und ihren Ableitungen allein bestimmen, da einerseits A die Ableitungen erster Ordnung x , y , und ausserdem nur die Ableitungen von x , y nach x allein enthält, während andererseits A , Γ y und ihre Ableitungen gar nicht enthalten, A' , $A,$ die zweite Ableitung von y wenigstens einmal nach y (y' , y'') enthalten.

Wir bezeichnen mit

$$Pf \equiv p = 0$$

$$Qf \equiv q = 0$$

$$U_t f \equiv \frac{1}{t!} \sum_{t=0}^{r+1} \sum_{n=0}^m \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{n_1=0}^n \sum_{t=2}^{m_1-1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \sum_{t=3}^{m_2-1} \dots \sum_{t=t-1}^{m_{t-2}-1} \sum_{n_{t-1}=0}^{n_{t-2}} \binom{m-n}{m_1-n_1} \binom{m_1-n_1}{m_2-n_2} \dots$$

$$\dots \binom{m_{t-2}-n_{t-2}}{m_{t-1}-n_{t-1}} \binom{n}{n_1} \binom{n_1}{n_2} \dots \binom{n_{t-2}}{n_{t-1}} x_{n-n_1}^{(m-n)-(m_1-n_1)} x_{n_1-n_2}^{(m_1-n_1)-(m_2-n_2)} \dots$$

$$\dots x_{n_{t-1}}^{m_{t-1}-n_{t-1}} q^n = 0$$

$$[t = 1, 2, \dots, r]$$

$$Xf \equiv x'p' + x, p, + \dots + x_{r+1}p_{r+1} = 0$$

$$Yf \equiv y'q' + y, q, + \dots + y_{r+1}q_{r+1} = 0$$

die Gleichungen des reducirten Systems. Dann bekommen wir

$$P(\mathcal{A}) = Q(\mathcal{A}) \equiv 0;$$

$$X\left(\frac{x^m}{x'}\right) = Y\left(\frac{x^m}{x'}\right) = X(\mathfrak{A}_t^m) = Y(\mathfrak{A}_t^m) = 0,$$

$$X(\mathfrak{B}^m) = Y(\mathfrak{B}^m) \equiv 0,$$

und also

$$X(\mathcal{A}) = Y(\mathcal{A}) \equiv 0;$$

$$U_h(\mathfrak{A}_t^m) \equiv 0, \quad U_1(\mathfrak{B}^m) \equiv 0, \quad U_h(\mathfrak{B}^m) = \frac{\mathfrak{A}_h^m \cdot x'}{x'y, - y'x}, \quad [h = 2, 3, \dots, r],$$

also $U_1(\mathcal{A}) \equiv 0$ und

$$U_h(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2'' & \mathfrak{A}_2''' \dots \mathfrak{A}_2^{r+1} \\ 0 & \mathfrak{A}_3''' \dots \mathfrak{A}_3^{r+1} \\ \cdot & \cdot \dots \mathfrak{A}_r^{r+1} \\ \mathfrak{A}_h'' & \mathfrak{A}_h''' \dots \mathfrak{A}_h^{r+1} \end{vmatrix} \cdot \frac{x'}{x'y, - y'x} \equiv 0.$$

$$[h = 2, 3, \dots, r.]$$

\mathcal{A} erfüllt also die sämtlichen Gleichungen des Systems und ist die verlangte Invariante $(r+1)$ -ter Ordnung.

Betrachten wir die Ableitungen nach x allein, so können wir in $U_t f = 0$ $n = n, = \dots = n_{t-1} = 0$ setzen, und dadurch bekommen

$$\bar{U}_t f \equiv \sum_{t=0}^{r+1} (x')^t \mathfrak{A}_t^m q^m = 0,$$

oder

$$\bar{V}_t f \equiv \sum_{t=0}^{r+1} \mathfrak{A}_t^m q^m = 0 \quad [t = 1, 2, \dots, r].$$

Hierdurch ist \mathfrak{A}_t^m definit.

Wir brauchen nicht alle Ableitungen der Invariante Γ , sondern bloss ihre Ableitungen nach ξ zu benutzen, um die Gesamtzahl der unabhängigen Invarianten zu vervollständigen.

Da jede Function der Invarianten allein auch eine Invariante ist, so haben wir eine grosse Auswahl von Formen derselben. Wir wählen daher unsere Invarianten in solcher Gestalt, um zwei besondere Schwierigkeiten des Auflösungsprocesses möglichst zu erleichtern. Diese sind, erstens das Ausdrücken des Zuwachses jeder Invariante durch die Invarianten allein, und zweitens die Ausrechnung der Integrabilitätsbedingungen in bequemster Weise.

D. Führen wir auf die Invarianten \mathcal{A} , Γ , \mathcal{A}' , \mathcal{A} , \mathcal{A} und deren Ableitungen bis zur $(r+1)$ -ten Ordnung die $(r+1)$ -mal erweiterte beliebige Transformation $\mathfrak{X}^{(s)}f$ aus, so ergeben sich die folgenden Zuwüchse:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} A_v^{\mu-\nu} &= -\xi_{v+1}^{\mu-\nu} + \sum_0^{\mu-\nu+1} \sum_0^{\nu} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1} A_k^i \xi_{v-k}^{\mu-\nu-i+1} - \\ &\quad - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu+1} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu+1}{k} A_k^i \eta_{v-k+1}^{\mu-\nu-i} + \\ &\quad + \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \sum_0^i \sum_0^k \sigma \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} A_\tau^\sigma A_{k-\tau}^{i-\sigma} \eta_{v-k}^{\mu-\nu-i+1} + \\ &\quad + [A_v^{\mu-\nu+1} \xi + A_{v+1}^{\mu-\nu} \eta] \\ \mathfrak{X} \Gamma^\mu &= -\xi^{\mu+2} - \sum_0^{\mu+2} \binom{\mu+2}{i} A^i \eta^{\mu-i+2} - \sum_0^{\mu+1} \binom{\mu+1}{i} \left\{ \Gamma^i \xi^{\mu-i+1} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_0^i \binom{i}{\sigma} A^\sigma \Gamma^{i-\sigma} \eta^{\mu-i+1} \right\} + [\Gamma^{\mu+1} \xi + \Gamma_\eta^\mu \eta] \\ \mathfrak{X} A_v^{\mu-\nu} &= -\xi_v^{\mu-\nu+1} - \eta_{v+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \{ A_k^{i+1} \xi_{v-k}^{\mu-\nu-i} + \\ &\quad + A_{k+1}^i \eta_{v-k}^{\mu-\nu-i} \} + [A_v^{\mu-\nu+1} \xi + A_{v+1}^{\mu-\nu} \eta] \\ \mathfrak{X} \mathcal{A} &= -\sum_0^r k \eta^{r-k+1} \left| \begin{array}{cccc} \mathfrak{G}_{r-k+2}^{r-k+2} & \mathfrak{G}_{r-k+2}^{r-k+3} & \dots & \mathfrak{G}_{r-k+2}^{r+2} \\ 0 & \mathfrak{G}_{r-k+3}^{r-k+3} & \dots & \mathfrak{G}_{r-k+3}^{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{G}_{r+1}^{r+2} \\ 1 & \binom{r-k+2}{r-k+1} \mathfrak{G}'' & \dots & \binom{r+2}{r-k+1} \mathfrak{G}^k \end{array} \right| - \mathcal{A}[(r+1)\xi' + \\ &\quad + (r+2)\mathcal{A}\eta' - \eta],\end{aligned}$$

wo \mathfrak{G}_t^m und \mathfrak{H}^m die Werte besitzen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_t^m &\equiv \frac{1}{t!} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{i=2}^{m_1-1} \dots \sum_{i=1}^{m_{t-2}-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \\ &\dots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \left[\Gamma^{m-m_1-2} + \sum_2^{m-m_1-1} \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^{m-m_1-2} \sum_{h=2}^{l_1-1} l_2 \dots \right. \\ &\dots \sum_1^{l_{h-2}-1} l_{h-1} \binom{m-m_1-1}{l_1} \binom{l_1}{l_2} \dots \binom{l_{h-2}}{l_{h-1}} \Gamma^{m-m_1-l_1-2} \Gamma^{l_1-l_2-1} \dots \\ &\dots \left. \Gamma^{l_{h-2}-l_{h-1}-1} \Gamma^{l_{h-1}-1} \right] \dots \\ &\dots \left[\Gamma^{m_{t-2}-m_{t-1}-2} + \sum_2^{m_{t-2}-m_{t-1}-1} \frac{1}{h!} \sum \dots \right] \left[\Gamma^{m_{t-1}-2} + \sum_2^{m_{t-1}-1} \frac{1}{h!} \sum \dots \right] \\ \mathfrak{H}^m &\equiv \mathcal{A}^m + \sum_2^m \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^{m-1} \sum_{h=2}^{m_1-1} \dots \sum_{i=1}^{m_{h-2}-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \\ &\dots \binom{m_{h-2}}{m_{h-1}} \mathcal{A}^{m-m_1} \mathcal{A}^{m_1-m_2} \dots \mathcal{A}^{m_{h-2}-m_{h-1}} \mathcal{A}^{m_{h-1}}.\end{aligned}$$

Ich habe diesen Werth von $\mathfrak{H}\mathcal{A}$ durch Induction bekommen und seine Richtigkeit für $s = 2, 3, 4, 5, 6$ bestätigt. Zu einem allgemeinen Beweis dafür fehlen aber noch einige Punkte, die ich hoffe später zu erledigen.

E. Die Anwendung der passenden Formel liefert die verlangten Definitionsgleichungen

$$\begin{aligned}\xi_{r+1}^{\mu-\nu} &- \sum_0^{\mu-\nu+1} \sum_0^{\nu} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1} \alpha_k^i \xi_{r-k}^{\mu-\nu-i+1} + \\ &+ \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{r+1} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \alpha_k^i \eta_{r-k+1}^{\mu-\nu-1} - \\ &- \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \sum_0^i \sum_0^k \sigma \tau \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \alpha_\sigma^\tau \alpha_{k-\tau}^{i-\sigma} \eta_{r-k}^{\mu-\nu-i+1} = 0 \\ \xi^{\mu+2} &+ \sum_0^{\mu+2} \binom{\mu+2}{i} \alpha^i \eta^{\mu-i+1} + \sum_0^{\mu+1} \binom{\mu+1}{i} \left\{ \gamma^i \xi^{\mu-i+1} + \right. \\ &\left. + \sum_0^i \sigma \binom{i}{\sigma} \alpha^\sigma \gamma^{i-\sigma} \eta^{\mu-i+1} \right\} = 0\end{aligned}$$

$$\xi_v^{\mu-\nu+1} + \eta_{v+1}^{\mu-\nu} + \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \{ \lambda_k^{i+1} \xi_{v-k}^{\mu-\nu-i} + \lambda_{k+1}^i \eta_{v-k}^{\mu-\nu-i} \} = 0$$

$$\sum_0^r k \eta^{r-k+1} \begin{vmatrix} g_{r-k+2}^{r-k+2} & g_{r-k+2}^{r-k+3} & \dots & g_{r-k+2}^{r+2} \\ 0 & g_{r-k+3}^{r-k+3} & \dots & g_{r-k+3}^{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_{r+1}^{r+2} \\ 1 & \binom{r-k+2}{r-k+1} \mathfrak{h}'' & \dots & \binom{r+2}{r-k+1} \mathfrak{h}^k \end{vmatrix} + \delta[(r+1)\xi' + (r+2)\alpha\eta' - \eta_r] + \delta'\xi + \delta\eta = 0.$$

Hier besitzen die Hilfsgrößen g_i^m und \mathfrak{h}^m die Werte

$$g_i^m \equiv \frac{1}{i!} \sum_{t=1}^{m-1} m_1 \sum_{t=2}^{m_1-1} m_2 \dots \sum_1^{m_{t-2}-1} m_{t-2} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots$$

$$\dots \binom{m_{h-2}}{m_{h-1}} \left[\gamma^{m-m_1-2} + \sum_2^h \frac{1}{h!} \sum_{h-1}^{m-m_1-2} \sum_{h-1}^{l_1-1} \dots \right.$$

$$\left. \dots \sum_{l_1}^{l_{h-2}-1} \binom{m-m_1-1}{l_1} \binom{l_1}{l_2} \dots \binom{l_{h-2}}{l_{h-1}} \gamma^{m-m_1-l_1-2} \gamma^{l_1-l_2-1} \dots \gamma^{l_{h-2}-l_{h-1}-1} \gamma^{l_{h-1}} \right] \dots$$

$$\dots \left[\gamma^{m_{t-2}-m_{t-1}-2} + \sum_2^{m_{t-2}-m_{t-1}-2} \frac{1}{h!} \sum_{h-1}^{m_{t-2}-m_{t-1}-2} \dots \right] \left[\gamma^{m_{t-1}-2} + \sum_2^{m_{t-1}-1} \frac{1}{h!} \sum_{h-1}^{m_{t-1}-1} \dots \right]$$

$$\mathfrak{h}^m \equiv \lambda^m + \sum_2^m \frac{1}{h!} \sum_{h-1}^{m-1} m_1 \sum_{h-2}^{m_1-1} m_2 \dots \sum_1^{m_{h-1}-1} m_{h-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots$$

$$\dots \binom{m_{h-2}}{m_{h-1}} \lambda^{m-m_1} \lambda^{m_1-m_2} \dots \lambda^{m_{h-2}-m_{h-1}} \lambda^{m_{h-1}}.$$

F. Die sämtlichen Ableitungen $(r+1)$ -ter Ordnung $\xi^{r+1} \dots \eta_{r+1}$ sind dadurch bestimmt, und das System ist unbeschränkt integabel. Wenn wir die Gleichungen noch einmal differentiiren und alle möglichen Ableitungen der ξ und η fortschaffen, bekommen wir die beiden Integrabilitätsbedingungen

$$\gamma, = \alpha'' + \alpha\gamma' + \gamma\alpha'$$

$$\delta, - \alpha\delta' + \delta[\lambda, - \alpha\lambda' - (r+2)\alpha'] = \begin{vmatrix} 1 & g_1'' & g_1''' & \dots & g_1^{r+1} \\ 0 & 1 & g_2''' & \dots & g_2^{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_{r+1}^{r+2} \\ 1 & \mathfrak{h}' & \mathfrak{h}'' & \dots & \mathfrak{h}^{r+1} \end{vmatrix}.$$

Hier besitzen die Grössen g_i^m , bez. h^m die oben erwähnten Werte. Die erste Bedingung ist schon benutzt worden, um die zweite Definitionsgleichung zu vereinfachen.

Es ist zu bemerken, dass in den Definitionsgleichungen die unteren und oberen Striche in den Symbolen α' , α , (sowohl auch λ' , λ , u. s. w.) bloss Unterscheidungszeichen sind, und dass α , α' , α , zunächst nur drei verschiedene Functionen darstellen. Als Integrabilitätsbedingungen aber bekommen wir gleich jetzt $\alpha' = (\alpha)'$, $\alpha = (\alpha)$. Deswegen können wir die Klammern weglassen und die Ableitung α' statt $(\alpha)'$ schreiben.

Dieselbe Bemerkung gilt für alle Typen. Deshalb habe ich der Einfachheit wegen die sämtlichen Definitionsgleichungen ohne die Klammern geschrieben.

§ IV.

Sämtliche Typen der endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen in der Ebene.

Theorem 6. (Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, dritter Abschnitt, S. 71.) »Jede endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen der Ebene x, y ist durch eine Punkttransformation mit einer und im Allgemeinen nur mit einer der nachstehend aufgeführten Gruppen ähnlich:

A. Primitive Gruppen.

- 1) $p, q, xq, xp - yq, yp, xp - yq, x^2p + xyq, xyp + y^2q.$
- 2) $p, q, xq, xp - yq, yp, xp + yq.$
- 3) $p, q, xq, xp - yq, yp.$

B. Imprimitive Gruppen.

I. Gruppen mit einer einzigen invarianten Schaar von ∞^1 Curven.

a) Die invariante Schaar zählt bloss einfach.

- 4) $q, xq, p, 2xp + yq, x^2p + xyq.$
- 5) $q, xq, \dots x^r q, p, 2xp + ryq, x^2p + rxyq.$
[$r > 2.$]
- 6) $q, xq, \dots x^r q, yq, p, xp, x^2p + rxyq.$
[$r > 0.$]

- 7) $yq, p, xp, x^2p + xyq.$
- 8) $q, xq, \dots x^r q, yq, p, xp.$
[$r > 0.$]
- 9) $q, xq, \dots x^r q, p, xp + cyq.$
[$r > 0, c \neq 1.$]
- 10) $q, xq, \dots x^{r-1} q, p, xp + (ry + x^r)q.$
[$r > 1.$]
- 11) $q, xq, \dots x^m q, \mathfrak{e}^{\alpha_k x} q, x \mathfrak{e}^{\alpha_k x} q, \dots x^{m_k} \mathfrak{e}^{\alpha_k x} q, yq, p.$
[$k = 1, 2, \dots l; l \leq 0; l + m + \sum_1^l m_k > 0; \alpha_1 = 1.$]
- 12) $q, xq, F_1(x)q, \dots F_r(x)q, yq.$
[$r \leq 0.$]

b) Die invariante Schaar zählt doppelt.

- 13) $q, xq, x^2q, p, xp + yq, x^2p + 2xyq.$
- 14) $p, 2xp + yq, x^2p + xyq.$
- 15) $q, xq, \dots x^r q, p, xp + yq.$
[$r > 0.$]
- 16) $q, p, xp + (x + y)q.$
- 17) $\mathfrak{e}^{\alpha_k x} q, x \mathfrak{e}^{\alpha_k x} q, \dots x^{m_k} \mathfrak{e}^{\alpha_k x} q, p.$
[$\alpha_1(\alpha_1 - 1) = 0; k = 1, 2, \dots l; l > 0; l + \sum_1^l m_k > 1.$]
- 18) $q, xq, F_1(x)q, \dots F_r(x)q.$
[$r \leq 0.$]

II. Gruppen mit zwei invarianten Schaaren von je ∞^1 Curven.

- 19) $q, yq, y^2q, p, xp, x^2p.$
- 20) $p + q, xp + yq, x^2p + y^2q.$
- 21) $q, yq, y^2q, p, xp.$
- 22) $q, yq, y^2q, p.$
- 23) $q, yq, y^2q.$
- 24) $q, yq, p, xp.$
- 25) $q, p, xp + cyq.$
[$c \neq 0, 1.$]
- 26) $q, yq, p.$
- 27) $q, yq.$

III. Gruppen mit ∞^1 Schaaren von je ∞^1 Curven.

28) $p, q, xp + yq.$

29) $q, xp + yq.$

30) $p, q.$

IV. Gruppen mit ∞^∞ Schaaren von je ∞^1 Curven.

31) $q.$

§ V.

Bestimmung der Ordnungszahl der nötigen Erweiterung, sowie der Gesamtzahl der unabhängigen Invarianten.

Typus 1.)*)

	Ordnung.	Gesamte Größen, $n.$	Bestimmte Größen, $m.$	Übrige Größen, $n - m.$
$\xi = e_1 + e_3x + e_4y + e_7x^2 + e_8xy$				
$\eta = e_2 + e_5x + e_6y + e_7xy + e_8y^2$				
$\xi' = e_3 + 2e_7x + e_8y$				
$\xi_1 = e_4 + e_8x$				
$\eta' = e_5 + e_7y$				
$\eta_1 = e_6 + e_7x + 2e_8y$	0	2	0	2
$\xi'' = 2e_7, \xi'_1 = e_8, \xi_{11} = 0$	1	4	0	4
$\eta'' = 0, \eta'_1 = e_7, \eta_{11} = 2e_8$	2	6	4	2
$\varrho = 8, s = 2, T = 4.$	3	8	8	0

[Siehe Auflösung, § III, S. 17.]

2.)

$\xi = e_1 + e_3x + e_4y$				
$\eta = e_2 + e_5x + e_6y$				
$\xi' = e_3, \xi_1 = e_4$	0	2	0	2
$\eta' = e_5, \eta_1 = e_6$	1	4	0	4
$\xi'' = \xi'_1 = \xi_{11} = \eta'' = \eta'_1 = \eta_{11} = 0$	2	6	6	0
$\varrho = 6, s = 2, T = 6.$				

*) Der Einfachheit wegen schreibe ich ξ, η statt $\bar{\xi}, \bar{\eta}$.

3.)	Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
$\xi = e_1 + e_4x + e_5y$				
$\eta = e_2 + e_3x - e_4y$				
$\xi' = e_4, \xi'' = e_5$				
$\eta' = e_3, \eta'' = -e_4$	0	2	0	2
$\xi''' = \xi'_1 = \xi''_1 = \eta''' = \eta'_1 = \eta''_1 = 0$	1	4	1	3
$\varrho = 5, s = 2, T = 7.$	2	6	6	0

4.)	Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
$\xi = e_3 + 2e_4x + e_5x^2$				
$\eta = e_1 + e_2x + e_4y + e_5xy$	0	2	0	2
$\xi' = 2e_4 + 2e_5x, \xi'' = 0$	1	4	2	2
$\eta' = e_2 + e_5y, \eta'' = e_4 + e_5y$	2	6	5	1
$\xi''' = 2e_5, \xi'_1 = \xi''_1 = \eta''' = \eta'_1 = 0, \eta''_1 = e_5.$	3	8	8	0
$\varrho = 5, s = 2, T = 7.$				
[Siehe § III, S. 17.]				

5.)	Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
$\xi = e_1 + 2e_2x + e_3x^2$				
$\eta = re_2y + re_3xy + c_0 + c_1x + \dots + c_rx^r$	0	2	0	2
$\xi' = 2e_2 + 2e_3x, \xi'' = 0$	1	4	1	3
$\eta' = re_3y + c_1 + 2c_2x + \dots + rc_rx^{r-1}$	2	6	4	2
$\eta'' = re_2 + re_3x$	3	8	7	1
$\xi'' = 2e_3, \xi'_1 = \xi''_1 = \eta''_1 = 0, \eta'_1 = re_3$	4	10	9	1
$\eta'' = 2c_2 + 6c_3x + \dots + r(r-1)c_rx^{r-2}$	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
$\xi''' = \dots \xi'''_1 = \eta'''_1 = \eta''_1 = \eta'''_1 = 0$	r	$2(r+1)$	$2r+1$	1
$\eta''' = 6c_3 + 24c_4x + \dots + r(r-1)(r-2)c_rx^{r-3}$	$r+1$	$2(r+2)$	$2r+4$	0
$\eta^{r+1} = 0$				
$\varrho = r+4, s = r+1, T = r^2+4r+2.$				

	Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
6.)				
$\xi = e_1 + e_2x + e_3x^2$				
$\eta = re_3xy + e_4y + c_0 + c_1x + \dots + c_rx^r$				
$\xi' = e_2 + 2e_3x, \xi_r = 0$				
$\eta' = re_3y + c_1 + 2c_2x + \dots + rc_rx^{r-1}$				
$\eta_r = re_3x + e_4$	0	2	0	2
$\xi'' = 2e_3, \xi'_r = \xi_{rr} = \eta_{rr} = 0, \eta'_r = re_3$	1	4	1	3
$\eta'' = 2c_2 + 6c_3x + \dots + r(r-1)c_rx^{r-2}$	2	6	4	2
$\xi''' = \dots = \xi_{rr} = \eta'_{rr} = \eta''_{rr} = \eta_{rrr} = 0$	3	8	7	1
$\eta''' = 6c_3 + 24c_4x + \dots + r(r-1)(r-2)c_rx^{r-3}$	4	10	9	1
$\eta^{r+1} = 0$	r	$2(r+1)$	$2r+1$	1
$q = r+5, s = r+1, T = r^2+4r+1.$	$r+1$	$2(r+2)$	$2r+4$	0

7.)				
$\xi = e_1 + e_2x + e_4x^2$				
$\eta = e_3y + e_4xy$	0	2	0	2
$\xi' = e_2 + 2e_4x, \xi_r = 0$	1	4	2	2
$\eta' = e_4y, \eta_r = e_3 + e_4x$	2	6	6	0
$\xi'' = 2e_4, \xi'_r = \xi_{rr} = \eta'' = \eta_{rr} = 0, \eta'_r = e_4.$				
$q = 4, s = 2, T = 8.$				

8.)				
$\xi = e_1 + e_2x$				
$\eta = e_3y + c_0 + c_1x + \dots + c_rx^r$	0	2	0	2
$\xi' = e_2, \xi_r = 0, \eta_r = e_3$	1	4	1	3
$\eta' = c_1 + 2c_2x + \dots + rc_rx^{r-1}$	2	6	5	1
$\xi'' = \xi'_r = \xi_{rr} = \eta'_r = \eta_{rr} = 0$	3	8	7	1
$\eta'' = 2c_2 + 6c_3x + \dots + r(r-1)c_rx^{r-2}$	r	$2(r+1)$	$2r+1$	1
$\eta^{r+1} = 0$	$r+1$	$2(r+2)$	$2r+4$	0
$q = r+4, s = r+1, T = r^2+4r+2.$				

	Ordnung.	Gesamte Größen.	Bestimmte Größen.	Übrige Größen.
9.)				
$\xi = e_1 + e_2 x$	0	2	0	2
$\eta = e_2 c y + a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r$	1	4	2	2
$\xi' = e_2, \xi_r = 0, \eta_i = e_2 c$	2	6	5	1
$\eta' = a_1 + 2a_2 x + \dots + r a_r x^{r-1}$	3	8	7	1
$\xi'' = \xi'_i = \xi_{ii} = \eta'_i = \eta_{ii} = 0$	r	$2(r+1)$	$2r+1$	1
$\eta'' = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + r(r-1)a_r x^{r-2}$	$r+1$	$2(r+2)$	$2r+4$	0
$\eta^{r+1} = 0$				
$\varrho = r+3, s = r+1, T = r^2+4r+3.$				

10.)				
$\xi = e_1 + e_2 x$				
$\eta = r e_2 y + e_2 x^r + c_0 + c_1 x + \dots + c_{r-1} x^{r-1}$	0	2	0	2
$\xi' = e_2, \xi_r = 0, \eta_i = r e_2$	1	4	2	2
$\eta' = r e_2 x^{r-1} + c_1 + 2c_2 x + \dots + (r-1)c_{r-1} x^{r-2}$	2	6	5	1
$\xi'' = \xi'_i = \xi_{ii} = \eta'_i = \eta_{ii} = 0$	3	8	7	1
$\eta'' = r(r-1)e_2 x^{r-2} + 2c_2 + 6c_3 x + \dots$	$r-1$	$2r$	$2r-1$	1
$\dots + (r-1)(r-2)c_{r-1} x^{r-3}$	r	$2(r+1)$	$2r+2$	0
$\eta^r = r! e_2$				
$\varrho = r+2, s = r, T = r^2+2r.$				

11.)

	Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
$\xi = e_1$				
$\eta = e_2 y + \sum_0^m c_{0i} x^i + \sum_1^l \sum_0^{m_k} c_{ki} x^i e^{\alpha_k x}$				
$\xi' = \xi_i = 0, \quad \eta_i = e_2$				
$\eta' = \sum_1^m c_{0i} i x^{i-1} + \sum_1^l \sum_0^{m_k} c_{ki} (\alpha_k x^i + i x^{i-1}) e^{\alpha_k x}$	0	2	0	2
$\xi'' = \xi_i' = \xi_{ii} = \eta_i' = \eta_{ii} = 0$	1	4	2	2
$\eta'' = \sum_1^m c_{0i} \frac{i!}{(i-\sigma)!} c_{0i} x^{i-\sigma} +$	2	6	5	1
$+ \sum_1^l \sum_0^{m_k} \sum_0^{\sigma} \binom{\sigma}{h} \frac{i!}{(i-h)!} c_{ki} \alpha_k^{\sigma-h} x^{i-h} e^{\alpha_k x}$	3	8	7	1
$[\sigma = 1, 2, \dots s.]$	$\varrho-3$	$2(\varrho-2)$	$2\varrho-5$	1
	$\varrho-2$	$2(\varrho-1)$	$2\varrho-2$	0

$$\varrho = 3 + l + m + \sum_1^l m_k, \quad s = 1 + l + m + \sum_1^l m_k,$$

$$T = \left(2 + l + m + \sum_1^l m_k \right)^2 - 1.$$

12.)

$\xi = 0$	0	2	1	1
$\eta = e_1 + e_2 x + e_3 y + c_1 F_1(x) + \dots + c_r F_r(x)$	1	4	2	2
$\eta_i = e_3; \quad \eta_i' = \eta_{ii} = 0$	2	6	5	1
$\eta' = e_2 + c_1 F_1'(x) + \dots + c_r F_r'(x)$	3	8	7	1
$\eta^{r+2} = c_1 F_1^{(r+2)}(x) + \dots + c_r F_r^{(r+2)}(x)$	$r+1$	$2(r+1)$	$2r+3$	1
$\varrho = r+3, \quad s = r+2, \quad T = r^2 + 6r + 9.$	$r+2$	$2(r+2)$	$2r+6$	0

13.)

$\xi = e_1 + e_5 x + e_6 x^2$				
$\eta = e_2 + e_3 x + e_4 x^2 + e_5 y + 2e_6 xy$				
$\xi' = e_5 + 2e_6 x, \quad \xi_i = 0$	0	2	0	2
$\eta' = e_3 + 2e_4 x + 2e_6 y, \quad \eta_i = e_5 + 2e_6 x$	1	4	2	2
$\xi'' = 2e_6, \quad \xi_i' = \xi_{ii} = 0$	2	6	4	2
$\eta'' = 2e_4, \quad \eta_i' = 2e_6, \quad \eta_{ii} = 0$	3	8	8	0
$\xi''' = \dots = \eta_{iii} = 0$				
$\varrho = 6, \quad s = 3, \quad T = 14.$				

14.)

$$\begin{aligned}\xi &= e_1 + 2e_2x + e_3x^2 \\ \eta &= e_2y + e_3xy \\ \xi' &= 2e_2 + 2e_3x, \quad \xi_1 = 0 \\ \eta' &= e_3y, \quad \eta_1 = e_2 + e_3x \\ \xi'' &= 2e_3, \quad \xi'_1 = \xi'' = 0 \\ \eta'' &= 0, \quad \eta'_1 = e_3, \quad \eta'' = 0 \\ \varrho &= 3, \quad s = 2, \quad T = 9.\end{aligned}$$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	3	1
2	6	6	0

15.)

$$\begin{aligned}\xi &= e_1 + e_2x \\ \eta &= e_2y + c_0 + c_1x + \dots + c_r x^r \\ \xi' &= e_2, \quad \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = e_2 \\ \eta' &= c_1 + 2c_2x + \dots + r c_r x^{r-1} \\ \xi'' &= \xi'_1 = \xi'' = \eta'_1 = \eta'' = 0 \\ \eta'' &= 2c_2 + 6c_3x + \dots + r(r-1)c_r x^{r-2} \\ \eta^{r+1} &= 0 \\ \varrho &= r+3, \quad s = r+1, \quad T = r^2 + 4r + 3.\end{aligned}$$

0	2	0	2
1	4	2	2
2	6	5	1
3	8	7	1
.	.	.	.
r	2(r+1)	2r+1	1
r+1	2(r+2)	2r+4	0

16.)

$$\begin{aligned}\xi &= e_1 + e_3x \\ \eta &= e_2 + e_3x + e_3y \\ \xi' &= e_3, \quad \xi_1 = 0 \\ \eta' &= e_3, \quad \eta_1 = e_3 \\ \xi'' &= \dots = \eta'' = 0 \\ \varrho &= 3, \quad s = 1, \quad T = 3.\end{aligned}$$

[Siehe § III, S. 17.]

17.)

$$\xi = 0$$

$$\eta = \sum_1^l k \sum_0^{m_k} c_{ki} x^i e^{\alpha_k x}$$

$$\eta^\sigma = \sum_1^l k \sum_0^{m_k} \sum_0^\sigma \binom{\sigma}{h} \frac{i!}{(i-h)!} c_{ki} \alpha^{\sigma-h} x^{i-h} e^{\alpha_k x}$$

$$[\sigma = 1, 2, \dots s.]$$

$$\varrho = 1 + l + \sum_1^l k m_k, \quad s = l + \sum_1^l k m_k,$$

$$T = \left(1 + l + \sum_1^l k m_k\right)^2.$$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Ubrige Grössen.
0	2	1	1
1	4	3	1
2	6	5	1
$\varrho-2$	$2(\varrho-1)$	$2\varrho-3$	1
$\varrho-1$	2ϱ	2ϱ	0

18.)

$$\xi = 0$$

$$\eta = e_1 + e_2 x + c_1 F_2(x) + \dots + c_r F_r(x)$$

$$\eta^{r+2} = c_1 F_1^{(r+2)}(x) + \dots + c_r F_r^{(r+2)}(x)$$

$$\varrho = r+2, \quad s = r+2, \quad T = r^2 + 6r + 10.$$

0	2	1	1
1	4	3	1
2	6	5	1
$r+1$	$2(r+2)$	$2r+3$	1
$r+2$	$2(r+3)$	$2r+6$	0

19.)

$$\xi = e_1 + e_3 x + e_5 x^2$$

$$\eta = e_2 + e_4 y + e_6 y^2$$

$$\xi' = e_3 + 2e_5 x, \quad \xi_1 = \eta' = 0, \quad \eta_1 = e_4 + 2e_6 y$$

$$\xi'' = 2e_5, \quad \xi_1' = \xi_2 = \eta'' = \eta_1' = 0, \quad \eta_2 = 2e_6$$

$$\xi''' = \dots = \eta''' = 0$$

$$\varrho = 6, \quad s = 3, \quad T = 14.$$

0	2	0	2
1	4	2	2
2	6	4	2
3	8	8	0

20.)

$$\xi = e_1 + e_2 x + e_3 x^2$$

$$\eta = e_1 + e_2 y + e_3 y^2$$

$$\xi' = e_2 + 2e_3 x, \quad \xi_1 = \eta' = 0, \quad \eta_1 = e_2 + 2e_3 y$$

$$\xi'' = 2e_3, \quad \xi_1' = \xi_2 = \eta'' = \eta_1' = 0, \quad \eta_2 = 2e_3$$

$$\xi''' = \dots = \eta''' = 0$$

$$\varrho = 3, \quad s = 1, \quad T = 3.$$

[Siehe § III, S. 17.]

0	2	0	2
1	4	3	1
2	6	6	0
3	8	8	0

21.)

$$\xi = e_1 + e_3 x$$

$$\eta = e_2 + e_4 y + e_5 y^2$$

$$\xi' = e_3, \quad \xi_i' = \eta_i' = 0, \quad \eta_i' = e_4 + 2e_5 y$$

$$\xi'' = \xi_i'' = \xi_{ii}'' = \eta_i'' = \eta_{ii}' = 0, \quad \eta_{ii}'' = 2e_5$$

$$\xi''' = \dots = \eta_{iii}''' = 0$$

$$\varrho = 5, \quad s = 3, \quad T = 15.$$

Ordnung.	Gesamte Größen.	Bestimmte Größen.	Übrige Größen.
0	2	0	2
1	4	2	2
2	6	5	1
3	8	8	0

22.)

$$\xi = e_1$$

$$\eta = e_2 + e_3 y + e_4 y^2$$

$$\xi' = \xi_i' = \eta_i' = 0, \quad \eta_i' = e_3 + 2e_4 y$$

$$\xi'' = \xi_i'' = \xi_{ii}'' = \eta_i'' = \eta_{ii}' = 0, \quad \eta_{ii}'' = 2e_4$$

$$\xi''' = \dots = \eta_{iii}''' = 0$$

$$\varrho = 4, \quad s = 3, \quad T = 16.$$

0	2	0	2
1	4	3	1
2	6	5	1
3	8	8	0

23.)

$$\xi = 0$$

$$\eta = e_1 + e_2 y + e_3 y^2$$

$$\eta_i' = 0, \quad \eta_{ii}'' = e_2 + 2e_3 y$$

$$\eta_{ii}'' = \eta_{ii}' = 0, \quad \eta_{ii}'' = 2e_3$$

$$\xi''' = \dots = \eta_{iii}''' = 0$$

$$\varrho = 3, \quad s = 3, \quad T = 17.$$

0	2	1	1
1	4	3	1
2	6	5	1
3	8	8	0

24.)

$$\xi = e_1 + e_3 x$$

$$\eta = e_2 + e_4 y$$

$$\xi' = e_3, \quad \xi_i' = \eta_i' = 0, \quad \eta_i' = e_4$$

$$\xi'' = \dots = \eta_{iii}''' = 0$$

$$\varrho = 4, \quad s = 2, \quad T = 8.$$

0	2	0	2
1	4	2	2
2	6	6	0

25.)

$$\xi = e_1 + e_3 x$$

$$\eta = e_2 + e_3 c y$$

$$\xi' = e_3, \quad \xi_r = \eta' = 0, \quad \eta_r = e_3 c$$

$$\xi'' = \dots = \eta'' = 0$$

$$\varrho = 3, \quad s = 1, \quad T = 3.$$

[Siehe § III, S. 17.]

Ordnung.	Gesamte Größen.	Bestimmte Größen.	Übrige Größen.
0	2	0	2
1	4	3	1
2	6	6	0

26.)

$$\xi = e_1$$

$$\eta = e_2 + e_3 y$$

$$\xi' = \xi_r = \eta' = 0, \quad \eta_r = e_3$$

$$\xi'' = \dots = \eta'' = 0$$

$$\varrho = 3, \quad s = 2, \quad T = 9.$$

0	2	0	2
1	4	3	1
2	6	6	0

27.)

$$\xi = 0$$

$$\eta = e_1 + e_2 y$$

$$\xi' = \xi_r = \eta' = 0, \quad \eta_r = e_2$$

$$\xi'' = \dots = \eta'' = 0$$

$$\varrho = 2, \quad s = 2, \quad T = 10.$$

0	2	1	1
1	4	3	1
2	6	6	0

28.)

$$\xi = e_1 + e_3 x$$

$$\eta = e_2 + e_3 y$$

$$\xi' = e_3, \quad \xi_r = \eta' = 0, \quad \eta_r = e_3$$

$$\xi'' = \dots = \eta'' = 0$$

$$\varrho = 3, \quad s = 1, \quad T = 3.$$

[Siehe § III, S. 17.]

0	2	0	2
1	4	3	1
2	6	6	0

29.)

$$\xi = e_2 x$$

$$\eta = e_1 + e_2 y$$

$$\xi' = e_2, \quad \xi_r = \eta' = 0, \quad \eta_r = e_2$$

$$\xi'' = \dots = \eta'' = 0$$

$$\varrho = 2, \quad s = 1, \quad T = 4.$$

0	2	0	2
1	4	4	0

	Übrige Grössen.	Bestimmte Grössen.	Gesamte Grössen.	Ordnung
30.)				
$\xi = e_1$				
$\eta = e_2$				
$\xi' = \xi, = \eta' = \eta, = 0$	2	0	2	0
$\varrho = 2, s = 1, T = 4.$	0	4	4	1
31.)				
$\xi = 0$				
$\eta = e_1$				
$\xi' = \xi, = \eta' = \eta, = 0$	1	1	2	0
$\varrho = 1, s = 1, T = 5.$	0	4	4	1

§ VI.

Bestimmung der Zahl der wesentlichen Invarianten.

	Ordnung	Gleichungen 0-ter bis m -ter Ord.	Ges. Grössen 0-ter bis m -ter Ord.	Ges. Invar. 0-ter bis m -ter Ord.	Ges. Invar. m -ter Ord.	Invar. m -ter Ord. durch Diff.	Wesentl. Invar. m -ter Ord.
	M	G	V	T	I	D	W
Typus 1.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	6	6	0	0	0	0
	2	8	12	4	4	0	4
	3	8	20	12	8	8	0
2.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	6	6	0	0	0	0
	2	6	12	6	6	0	6
	3	6	20	14	8	8	0
3.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	5	6	1	1	0	1
	2	5	12	7	6	2	4
	3	5	20	15	8	8	0

	M	G	V	T	I	D	W
4.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	5	12	7	5	4	1
	3	5	20	15	8	8	0

5.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	6	12	6	4	4	0
	3	7	20	13	7	6	1
	4	8	30	22	9	9	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante
($r + 1$)-ter Ordnung.

6.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	5	6	1	1	0	1
	2	7	12	5	4	2	2
	3	8	20	12	7	6	1
	4	9	30	21	9	9	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante
($r + 1$)-ter Ordnung.

7.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	4	12	8	6	4	2
	3	4	20	16	8	8	0

8.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	5	6	1	1	0	1
	2	6	12	6	5	2	3
	3	7	20	13	7	7	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante
($r + 1$)-ter Ordnung.

9.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	5	12	7	5	4	1
	3	6	20	14	7	7	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante
($r + 1$)-ter Ordnung.

	M	G	V	T	I	D	W
10.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	5	12	7	5	4	1
	3	6	20	14	7	7	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante
 r -ter Ordnung.

11.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	5	12	7	5	3	2
	3	6	20	14	7	7	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante
 s -ter Ordnung.

12.)	0	1	2	1	1	0	1
	1	3	6	3	2	2	0
	2	4	12	8	5	3	2
	3	5	20	15	7	7	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante
 $(r + 2)$ -ter Ordnung.

13.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	6	12	6	4	4	0
	3	6	20	14	8	6	2
	4	6	30	24	10	10	0

14.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	3	12	9	6	5	1
	3	3	20	17	8	8	0

15.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	5	12	7	5	4	1
	3	6	20	14	7	7	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante
 $(r + 1)$ -ter Ordnung.

	<i>M</i>	<i>G</i>	<i>V</i>	<i>T</i>	<i>I</i>	<i>D</i>	<i>W</i>
16.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	3	12	9	6	6	0

17.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	4	12	8	5	5	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante
s-ter Ordnung.

18.)	0	1	2	1	1	0	1
	1	2	6	4	3	2	1
	2	3	12	9	5	5	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante
(*r* + 2)-ter Ordnung.

19.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	6	12	6	4	4	0
	3	6	20	14	8	6	2
	4	6	30	24	10	10	0

20.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	3	12	9	6	6	0

21.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	5	12	7	5	4	1
	3	5	20	15	8	7	1
	4	5	30	25	10	10	0

22.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	4	12	8	5	5	0
	3	4	20	16	8	7	1
	4	4	30	26	10	10	0

	<i>M</i>	<i>G</i>	<i>V</i>	<i>T</i>	<i>I</i>	<i>D</i>	<i>W</i>
23.)	0	1	2	1	1	0	1
	1	2	6	4	3	2	1
	2	3	12	9	5	5	0
	3	3	20	17	8	7	1
	4	3	30	27	10	10	0
24.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	4	12	8	6	4	2
	3	4	20	16	8	8	0
25.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	3	12	9	6	6	0
26.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	3	12	9	6	5	1
	3	3	20	17	8	8	0
27.)	0	1	2	1	1	0	1
	1	2	6	4	3	2	1
	2	2	12	10	6	5	1
	3	2	20	18	8	8	0
28.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	3	12	9	6	6	0
29.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	2	6	4	4	0	4
	2	2	12	10	6	6	0
30.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	2	6	4	4	0	4
	2	2	12	10	6	6	0
31.)	0	1	2	1	1	0	1
	1	1	6	5	4	2	2
	2	1	12	11	6	6	0

§ VII.

Zusammenstellung der Invarianten, Definitionsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen der sämtlichen Typen.

Typus 1.) $p, q, xq, xp - yq, yp, xp + yq,$
 $x^2p + xyq, xyp + y^2q.$

Invarianten.

$$B = \frac{x'y'' - y'x''}{x'y, - y'x,}$$

$$\Phi = \frac{2(x'y'_i - y'x'_i) + (x,y'' - y,x'')}{x'y, - y'x,}$$

$$\Psi = \frac{(x'y'' - y'x'') + 2(x,y'_i - y,x'_i)}{x'y, - y'x,}$$

$$\Theta = \frac{x,y'' - y,x''}{x'y, - y'x,}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\eta'' + 2\beta\xi' + \varphi\eta' - \beta\eta, + \beta'\xi + \beta,\eta = 0$$

$$2\eta'_i - \xi'' + \varphi\xi' + 3\beta\xi, + 2\psi\eta' + \varphi'\xi + \varphi,\eta = 0$$

$$\eta'' - 2\xi'_i + 2\varphi\xi, + 3\theta\eta' + \psi\eta, + \psi'\xi + \psi,\eta = 0$$

$$\xi'' + \theta\xi' - \psi\xi, - 2\theta\eta, - \theta'\xi - \theta,\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$3\beta'' - 2\varphi'_i + \psi'' + 3\beta\psi, + 3\psi\beta, - 6\beta\theta' - 3\theta\beta' - 2\varphi\varphi, + \varphi\psi' = 0$$

$$\varphi'' - 2\psi'_i + 3\theta'' + 3\beta\theta, + 6\theta\beta, - 3\varphi\theta' - 3\theta\varphi' - \psi\varphi, + 2\psi\psi' = 0.$$

2.) $p, q, xq, xp - yq, yp, xp + yq.$

Invarianten.

$$B = \frac{x'y'' - y'x''}{x'y, - y'x,}, \quad E = \frac{x'y'_i - y'x'_i}{x'y, - y'x,}, \quad \Omega = \frac{x'y'' - y'x''}{x'y, - y'x,},$$

$$\Phi = \frac{x,y'' - y,x''}{x'y, - y'x,}, \quad \Psi = \frac{x,y'_i - y,x'_i}{x'y, - y'x,}, \quad \Theta = \frac{x,y'' - y,x''}{x'y, - y'x,}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\eta'' + 2\beta\xi' + (2\varepsilon + \varphi)\eta' - \beta\eta + \beta'\xi + \beta,\eta = 0$$

$$\eta'_i + \varepsilon\xi' + \beta\xi + (\omega + \psi)\eta' + \varepsilon'\xi + \varepsilon,\eta = 0$$

$$\eta_{ii} + 2\varepsilon\xi + \theta\eta' + \omega\eta + \omega'\xi + \omega,\eta = 0$$

$$\xi'' - \varphi\xi' - \beta\xi - 2\psi\eta' - \varphi'\xi - \varphi,\eta = 0$$

$$\xi'_i - (\varepsilon + \varphi)\xi - \theta\eta' - \psi\eta - \psi'\xi - \psi,\eta = 0$$

$$\xi'' + \theta\xi' - (\omega + 2\psi)\xi - 2\theta\eta - \theta'\xi - \theta,\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\varepsilon, - \omega' = \varphi, - \psi' = \varepsilon\psi - \beta\theta$$

$$\psi, - \theta' = \psi(\psi + \omega) - \theta(\beta + \varepsilon)$$

$$\beta, - \varepsilon' = \varepsilon(\varepsilon + \varphi) - \beta(\psi + \omega).$$

3.) $p, q, xq, xp - yq, yp.$

Invarianten.

$$A = x'y, -y'x, \quad B = x'y'' - y'x'', \quad E = x'y'_i - y'x'_i, \quad \Omega = x'y_{ii} - y'x_{ii},$$

$$A', \quad A_i, \quad \Theta = x,y_{ii} - y,x_{ii}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\alpha(\xi' + \eta_{ii}) + \alpha'\xi + \alpha,\eta + 0$$

$$\alpha\eta'' + 3\beta\xi' + (3\varepsilon - \alpha')\eta' + \beta'\xi + \beta,\eta = 0$$

$$\alpha\eta'_i + 2\varepsilon\xi' + \beta\xi + (2\omega - \alpha)\eta' + \varepsilon\eta + \varepsilon'\xi + \varepsilon,\eta = 0$$

$$\alpha\eta_{ii} + \omega\xi' + 2\varepsilon\xi + \theta\eta' + 2\omega\eta + \omega'\xi + \omega,\eta = 0$$

$$\alpha(\xi'' + \eta'_i) + 2\alpha'\xi' + \alpha,\eta' + \alpha'\eta + \alpha''\xi + \alpha',\eta = 0$$

$$\alpha(\xi'_i + \eta_{ii}) + \alpha,\xi' + \alpha'\xi + 2\alpha,\eta + \alpha',\xi + \alpha_{ii},\eta = 0$$

$$\alpha\eta_{ii} + (3\omega - 2\alpha) + 3\theta\eta + \theta'\xi + \theta,\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\alpha\varepsilon, - \alpha\omega' + \omega\alpha' = \varepsilon\omega - \beta\theta$$

$$\alpha\beta, - 2\beta\alpha, - \alpha\varepsilon' + 2\varepsilon\alpha' = 2\varepsilon^2 - 2\beta\omega$$

$$\alpha\alpha_{ii} - \alpha\omega, + \alpha\theta' - 2\omega\alpha, = 2\varepsilon\theta - 2\omega^2.$$

Die Bedingungen $\alpha' = (\alpha)'$, $\alpha, = (\alpha),$ sind schon benutzt worden, um die fünfte und die sechste Gleichung zu vereinfachen. (Siehe die allgemeine Anmerkung.)

4.) $q, xq, p, 2xp + xq, x^2p + xyq.$

$$A = \frac{x_i}{x'}, \quad A = \log \frac{x'y_i - y'x_i}{x'^{\frac{3}{2}}}, \quad B = \frac{x'y'' - y'x''}{x'y_i - y'x_i}, \quad A', A_i, A', A_i.$$

Definitionsgleichungen.

$$\begin{aligned} \xi_i + \alpha(\eta_i - \xi') - \alpha^2\eta' + \alpha'\xi + \alpha_i\eta &= 0 \\ \eta_i - \frac{1}{2}\xi' - \frac{3}{2}\alpha\eta' + \lambda'\xi + \lambda_i\eta &= 0 \\ \eta'' + 2\beta\xi' + (2\lambda' + 3\alpha\beta)\eta' + \beta'\xi + \beta_i\eta &= 0 \\ \xi'_i + \alpha(\eta'_i - \xi'') - \alpha^2\eta'' + (\alpha_i - 2\alpha\alpha')\eta' + \alpha'\eta_i + \alpha''\xi + \alpha'_i\eta &= 0 \\ \xi_{ii} + \alpha(\eta_{ii} - \xi'_i) - \alpha^2\eta'_i - \alpha_i\xi' + \alpha'\xi_i - 2\alpha\alpha_i\eta' + 2\alpha_i\eta_i + \alpha'_i\xi + \alpha_{ii}\eta &= 0 \\ \frac{1}{2}\xi'' + \frac{3}{2}\alpha\eta'' - \eta'_i - \lambda'\xi' - (\lambda_i - \frac{3}{2}\alpha')\eta' - \lambda''\xi - \lambda'_i\eta &= 0 \\ \frac{1}{2}\xi'_i + \frac{3}{2}\alpha\eta'_i - \eta_{ii} - \lambda'\xi_i + \frac{3}{2}\alpha_i\eta' - \lambda_i\eta_i - \lambda'_i\xi - \lambda_{ii}\eta &= 0. \end{aligned}$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\begin{aligned} \beta_{ii} - 2\alpha\beta'_i + \beta_i(\lambda_i - \alpha\lambda' - \frac{7}{2}\alpha') - \beta'(\alpha_i + \alpha\lambda_i - \alpha^2\lambda_i - \frac{3}{2}\alpha\alpha') + \\ + \beta(\lambda_{ii} - 2\alpha\lambda'_i + \alpha^2\lambda'' - \alpha_i\lambda' + 3\alpha\alpha'\lambda' - 2\alpha'\lambda_i - \frac{3}{2}\alpha'_i + \frac{3}{2}\alpha\alpha'' + 3\alpha'^2) - \\ - \lambda'_{ii} + \alpha\lambda''' - 2\lambda'\lambda'_i + 2\alpha\lambda'\lambda_{ii} + 2\alpha'\lambda'' + 2\alpha'\lambda'^2 - \frac{1}{2}\alpha''' = 0. \end{aligned}$$

Die Bedingungen $\alpha' = (\alpha)'$, $\alpha_i = (\alpha)_i$, $\lambda' = (\lambda)'$, $\lambda_i = (\lambda)_i$, sind schon benutzt worden.

5.) $q, xq, \dots x^r q, p, 2xp + ryq, x^2p + rxyq.$
[$r > 2.$]

Dieser Typus unterscheidet sich von dem Typus 6.) nur in dem Besitz der Invariante $\log \left(\frac{x'y_i - y'x_i}{x'^{\frac{r+2}{2}}} \right)$ und der daraus folgenden Gleichung. Alle übrigen Invarianten, Definitionsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen stimmen mit den zu jenem Falle gehörigen überein.

6.) $q, xq, \dots x^r q, yq, p, xp, x^2p + rxyq.$
[$r > 0.$]

Invarianten.

$$\begin{aligned} A_r^{\mu-\nu} &= \left(\frac{x_i}{x'} \right)_\nu^{\mu-\nu} & [\mu = 0, 1, \dots r; \nu = 0, 1, \dots \mu.] \\ A_r^{\mu-\nu} &= \left(\log \frac{x'y_i - y'x_i}{x'^{\frac{r+2}{2}}} \right)_\nu^{\mu-\nu} & [\mu = 1, 2, \dots r; \nu = 0, 1, \dots \mu.] \\ \Omega^\mu &= \left(\frac{2x'x''' - 3x''^2}{2x'^2} \right)^\mu & [\mu = 0, 1, \dots r-1.] \end{aligned}$$

$$A = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2'' & \mathfrak{A}_2''' & \dots & \mathfrak{A}_2^{r+1} \\ 0 & \mathfrak{A}_3''' & \dots & \mathfrak{A}_3^{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{A}_r^{r+1} \\ \mathfrak{B}'' & \mathfrak{B}''' & \dots & \mathfrak{B}^{r+1} \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{A}_t^m \equiv \frac{1}{t!} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{i_1=1}^{m_1-1} \dots \sum_{i_{t-1}=1}^{m_{t-1}-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \binom{m_{t-1}}{m_t} \frac{x^{m-m_1}}{x'} \frac{x^{m_1-m_2}}{x'} \dots$$

$$\dots \frac{x^{m_{t-2}-m_{t-1}-1}}{x'} \frac{x^{m_{t-1}-1}}{x'}$$

$$\mathfrak{B}^m \equiv \frac{x' y^m - y' x^m}{x' y - y' x}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_{r+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu+1} \sum_0^{\nu} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1} \alpha_k^i \xi_{r-k}^{\mu-\nu-i+1} +$$

$$+ \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu+1} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \alpha_k^i \eta_{r-k+1}^{\mu-\nu-i} -$$

$$- \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} k \sum_0^i \sum_0^k \tau \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \alpha_\tau^\sigma \alpha_{k-\tau}^{i-\sigma} \eta_{r-k}^{\mu-\nu-i+1} = 0.$$

$$\frac{r}{2} \xi_r^{\mu-\nu+1} - \eta_{r+1}^{\mu-\nu} + \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \left\{ \frac{r+2}{2} \alpha_k^i \eta_{r-k}^{\mu-\nu-i+1} - \lambda_{k+1}^{i+1} \xi_{r-k}^{\mu-\nu-i} - \right.$$

$$\left. - \lambda_{k+1}^i \eta_{r-k}^{\mu-\nu-i} \right\} = 0.$$

$$\xi^{\mu+3} + \sum_0^{\mu+3} i \binom{\mu+3}{i} \alpha^i \eta^{\mu-i+3} + \sum_0^{\mu+1} i \binom{\mu}{i} \left\{ \frac{2\mu-i+2}{\mu-i+1} \omega^i \xi^{\mu-i+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_0^i \frac{2\mu-i+\sigma+2}{\mu-i+1} \binom{i}{\sigma} \alpha^\sigma \omega^{i-\sigma} \eta^{\mu-i+1} \right\} = 0.$$

$$\sum_0^r k \eta^{r-k+1} \begin{vmatrix} g_{r-k+2}^{r-k+2} & g_{r-k+2}^{r-k+3} & \dots & g_{r-k+2}^{r+2} \\ 0 & g_{r-k+3}^{r-k+3} & \dots & g_{r-k+3}^{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_{r+1}^{r+2} \\ 1 & \binom{r-k+2}{r-k+1} \mathfrak{h}' & \dots & \binom{r+1}{r-k+1} \mathfrak{h}^k \end{vmatrix} + [(r+1)\xi' + (r+2)\alpha\eta' - \eta,] \delta +$$

$$+ \delta' \xi + \delta, \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$\omega_r = \alpha''' + 2\omega\alpha' + \alpha\omega'$, schon benutzt.

$$\delta_r = \alpha\delta' + \delta\left[\lambda_r - \alpha\lambda' - \frac{r+2}{2}\alpha'\right] = \begin{vmatrix} 1 & g_1' & \dots & g_1^{r+2} \\ 0 & 1 & \dots & g_2^{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_{r+1}^{r+2} \\ 1 & h' & \dots & h^{r+1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_t^m &\equiv \frac{1}{t!} \sum_{i=1}^{m-1} m_1 \sum_{i=2}^{m_1-1} m_2 \dots \sum_{i=t-1}^{m_{t-2}-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \\ &\dots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \left[v^{m-m_1-2} + \sum_h \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^{m-m_1-2} l_1 \sum_{h=2}^{l_1-1} l_2 \dots \right. \\ &\dots \sum_1^{l_{h-2}-1} \binom{m-m_1-1}{l_1} \binom{l_1}{l_2} \dots \binom{l_{h-2}}{l_{h-1}} v^{m-m_1-l_1-2} v^{l_1-l_2-1} \dots \\ &\dots v^{l_{h-2}-l_{h-1}-1} v^{l_{h-1}-1} \left. \right] \left[v^{m_1-m_2-2} + \sum \dots \right] \dots \\ &\dots \left[v^{m_{t-2}-m_{t-1}-2} + \sum \dots \right] \left[v^{m_{t-1}-2} + \sum \dots \right] \\ h^m &\equiv \lambda^m + \sum_h^m \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^m j_1 \sum_{h=2}^{j_1-1} j_2 \dots \sum_1^{j_{h-2}-1} \binom{m}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \\ &\dots \binom{j_{h-2}}{j_{h-1}} \lambda^{m-j_1} \lambda^{j_1-j_2} \dots \lambda^{j_{h-2}-j_{h-1}-1} \lambda^{j_{h-1}-1} + \\ &+ \sum_i^m \left(\frac{r}{2} + 1 \right) \sum_i^m m_1 \sum_{i=1}^{m_1-1} m_2 \dots \sum_{i=t-1}^{m_{t-2}-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \\ &\dots \binom{m_{t-1}}{m_t} \left[\lambda^{m-m_1} + \sum_h \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^{m-m_1} j_1 \sum_{h=2}^{j_1-1} j_2 \dots \sum_1^{j_{h-2}-1} \binom{m-m_1}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \right. \\ &\dots \binom{j_{h-2}}{j_{h-1}} \lambda^{m-m_1-j_1} \lambda^{j_1-j_2} \dots \lambda^{j_{h-2}-j_{h-1}-1} \lambda^{j_{h-1}-1} \left. \right] \left[v^{m_1-m_2-1} + \sum_h \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^{m_1-m_2-1} l_1 \sum_{h=2}^{l_1-1} l_2 \dots \right. \\ &\dots \sum_1^{l_{h-2}-1} \binom{m_1-m_2}{l_1} \binom{l_1}{l_2} \dots \binom{l_{h-2}}{l_{h-1}} v^{m_1-m_2-l_1-1} v^{l_1-l_2-1} \dots \\ &\dots v^{l_{h-2}-l_{h-1}-1} v^{l_{h-1}-1} \left. \right] \left[v^{m_2-m_3-1} + \sum \dots \right] \dots \\ &\dots \left[v^{m_{t-1}-m_{t-2}-1} + \sum \dots \right] \left[v^{m_{t-1}-1} + \sum \dots \right]. \end{aligned}$$

$$v^n \equiv \omega^{n-1} + \frac{1}{2} \sum_1^{n-2} \binom{n-1}{k} \omega^{n-k-2} \omega^{k-1} \quad [n > 0.]$$

$$v^0 \equiv 0.$$

7.) $yq, p, xp, x^2p + xyq.$

Invarianten.

$$A = \frac{x_i}{x'}, \quad A = \log \frac{x'y_i - y'x_i}{yx'}, \quad \Theta = \frac{yx'' - 2x'y'}{yx'}, \quad B = \frac{x'y'' - y'x''}{x'y_i - y'x_i},$$

$$A', A_i, A', A_i.$$

Definitionsgleichungen.

$$\begin{aligned} \xi_i + \alpha(\eta_i - \xi') - \alpha^2\eta' + \alpha'\xi + \alpha_i\eta &= 0 \\ \eta_i - \alpha\eta' + \lambda'\xi + \lambda_i\eta &= 0 \\ \xi'' + \alpha\eta'' + \theta\xi' + (\alpha\theta + \alpha' - 2\Theta^2)\eta' + \theta'\xi + \theta_i\eta &= 0 \\ \eta'' + 2\beta\xi' + (2\lambda' - \theta + 3\alpha\beta)\eta' - \beta\eta_i + \beta'\xi + \beta_i\eta &= 0 \\ \xi_i + \alpha(\eta'_i - \xi'') - \alpha^2\eta'' + (\alpha_i - 2\alpha\alpha')\eta' + \alpha'\eta_i + \alpha''\xi + \alpha'_i\eta &= 0 \\ \xi'' + \alpha(\eta''_i - \xi'_i) - \alpha^2\eta'_i - \alpha_i\xi' + \alpha'\xi_i - 2\alpha\alpha_i\eta' + 2\alpha_i\eta + \alpha'_i\xi + \alpha''_i\eta &= 0 \\ \eta'_i - \alpha\eta'' + \lambda'\xi' + (\lambda_i - \alpha'_i\eta' + \lambda''\xi + \lambda'_i\eta) &= 0 \\ \eta'' - \alpha\eta'_i + \lambda'\xi_i - \alpha_i\eta'_i + \lambda_i\eta + \lambda'_i\xi + \lambda''_i\eta &= 0. \end{aligned}$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\begin{aligned} \beta_i - \alpha\beta' + \beta(\lambda_i - \alpha\lambda' - 2\alpha') &= \lambda'' + \lambda'^2 - \theta\lambda' \\ \theta_i + 2\lambda'\Theta^2 &= \alpha'' + \theta\alpha' + \alpha\theta'. \end{aligned}$$

8.) $q, xq, \dots x^r q, yq, p, xp.$
 $[r > 0.]$

Die sämtlichen Invarianten und Definitionsgleichungen dieses Typus bekommen wir, wenn wir in denen des neunten Typus die Constante $c = -1$ setzen.

9.) $q, xq, \dots x^r q, p, xp + cyq.$
 $[r > 0, c \neq 1.]$

Invarianten.

$$A_v^{\mu-\nu} = \left(\frac{x_i}{x'}\right)_v^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0, 1, \dots r; \nu = 0, 1, \dots \mu.]$$

$$A_v^{\mu-\nu} = \left(\log \frac{x'y_i - y'x_i}{x'^{c+1}}\right)_v^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0, 1, \dots r; \nu = 0, 1, \dots \mu.]$$

$$\Gamma^\mu = \left(\frac{x''}{x'}\right)^\mu \quad [\mu = 0, 1, \dots, r-1.]$$

$$A = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2'' & \mathfrak{A}_2''' \dots \mathfrak{A}_2^{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{A}_r^{r+1} \\ \mathfrak{B}'' & \mathfrak{B}''' \dots \mathfrak{B}^{r+1} \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{A}_t^m \equiv \frac{1}{t!} \sum_{i=1}^{m-1} m_1 \sum_{i=2}^{m_1-1} m_2 \dots \sum_{i=t-1}^{m_{t-2}-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \frac{x^{m-m_1}}{x'} \frac{x^{m_1-m_2}}{x'} \dots$$

$$\dots \frac{x^{m_{t-2}-m_{t-1}-1}}{x'} \frac{x^{m_{t-1}-1}}{x'}.$$

$$\mathfrak{B}^m \equiv \frac{x' y^m - y' x^m}{x' y, - y' x,}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_{r+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu+1} \sum_0^\nu \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1} \alpha_k^i \xi_{r-k}^{\mu-\nu-i+1} +$$

$$+ \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu+1} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu+1}{k} \alpha_k^i \eta_{r-k+1}^{\mu-\nu-i} -$$

$$- \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^\nu \sum_0^i \sum_0^k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \alpha_\tau^\sigma \alpha_{k-\tau}^{i-\sigma} \eta^{\mu-\nu-i+1} = 0$$

$$c \xi_{r+1}^{\mu-\nu+1} - \eta_{r+1}^{\mu-\nu} + \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^\nu \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \{ (c+1) \alpha_k^i \eta_{r-k}^{\mu-\nu-i+1} -$$

$$- \lambda_{k+1}^{i+1} \xi_{r-k}^{\mu-\nu-i} - \lambda_{k+1}^i \eta_{r-k}^{\mu-\nu-i} \} = 0$$

$$\xi^{\mu+2} + \sum_0^{\mu+2} \binom{\mu+2}{i} \alpha^i \eta^{\mu-i+2} + \sum_0^{\mu+1} \binom{\mu+1}{i} \left\{ \gamma^i \xi^{\mu-i+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_0^i \binom{i}{\sigma} \alpha^\sigma \gamma^{i-\sigma} \eta^{\mu-i+1} \right\} = 0$$

$$\sum_0^r \eta^k \eta^{r-k+1} \begin{vmatrix} \mathfrak{g}_{r-k+2}^{r-k+2} & \mathfrak{g}_{r-k+2}^{r-k+3} & \dots & \mathfrak{g}_{r-k+2}^{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{g}_{r+1}^{r+2} \\ 1 & (r-k+1) \mathfrak{h}'' & \dots & (r-k+1) \mathfrak{h}^k \end{vmatrix} + \delta[(r+1)\xi' + (r+2)\alpha\eta' - \eta_r]$$

$$+ \delta'\xi + \delta\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\gamma, = \alpha'' + \alpha\gamma' + \gamma\alpha'$$

$$\delta, - \alpha\delta' + \delta[\lambda, - \alpha\lambda' + (c - r - 1)\alpha'] = \begin{vmatrix} 1 & g_1'' & g_1''' & \dots & g_1^{r+2} \\ 0 & 1 & g_2''' & \dots & g_2^{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_{r+1}^{r+2} \\ 1 & h' & h'' & \dots & h^{r+1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_t^m &\equiv \frac{1}{t!} \sum_{i=1}^{m-1} m_1 \sum_{i=2}^{m_1-1} m_2 \dots \sum_{i=1}^{m_{t-2}-1} m_{t-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \\ &\dots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \left[\gamma^{m-m_1-2} + \sum_2^{m-m_1-1} \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^{m-m_1-2} l_1 \sum_{h=2}^{l_1-1} l_2 \dots \right. \\ &\dots \sum_1^{l_{h-2}-1} l_{h-1} \binom{m-m_1-1}{l_1} \binom{l_1}{l_2} \dots \binom{l_{h-2}}{l_{h-1}} \gamma^{m-m_1-l_2-2} \gamma^{l_1-l_2-1} \dots \\ &\dots \gamma^{l_{h-2}-l_{h-1}} \gamma^{l_{h-1}-1} \left. \right] \dots \left[\gamma^{m_{t-1}-2} + \sum \dots \right]. \\ h^m &\equiv \lambda^m + \sum_2^m h \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^{m-1} j_1 \sum_{h=2}^{j_1-1} j_2 \dots \sum_1^{j_{h-2}-1} j_{h-1} \binom{m}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \\ &\dots \binom{j_{h-2}}{j_{h-1}} \lambda^{m-j_1} \lambda^{j_1-j_2} \dots \lambda^{j_{h-2}-j_{h-1}} \lambda^{j_{h-1}} + \\ &+ \sum_1^m \binom{c+1}{i} \sum_i^m m_1 \sum_{i=1}^{m_1-1} m_2 \dots \sum_{i=1}^{m_{i-1}-1} m_i \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \\ &\dots \binom{m_{i-1}}{m_i} \left[\lambda^{m-m_1} + \sum_2^{m-m_1} \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^{m-m_1-1} j_1 \dots \right] \left[\gamma^{m_1-m_2-1} + \right. \\ &\sum_2^{m_1-m_2} \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^{m_1-m_2-1} l_1 \sum_{h=2}^{l_1-1} l_2 \dots \sum_1^{l_{h-2}-1} l_{h-1} \binom{m_1-m_2}{l_1} \binom{l_1}{l_2} \dots \\ &\dots \binom{l_{h-2}}{l_{h-1}} \gamma^{m_1-m_2-l_1-1} \gamma^{l_1-l_2-1} \dots \gamma^{l_{h-2}-l_{h-1}-1} \gamma^{l_{h-1}-1} \left. \right] \dots \\ &\dots \left[\gamma^{m_{h-1}-1} + \sum \dots \right]. \end{aligned}$$

$$10.) \quad q, \quad xq, \quad \dots x^{r-1}q, \quad p, \quad xp + (ry + x)q. \\ [r > 1.]$$

Invarianten.

$$A_v^{\mu-\nu} = \left(\frac{x'}{x}\right)_v^{\mu-\nu} \quad [\mu=0, 1, \dots r-1; \nu=0, 1, \dots \mu.]$$

$$A_v^{\mu-\nu} = \left(\log \frac{x'y_i - y'x_i}{x'^{r+1}}\right)_v^{\mu-\nu} \quad [\mu=0, 1, \dots r-1; \nu=0, 1, \dots \mu.]$$

$$I^\mu = \left(\frac{x''}{x'}\right)^\mu \quad [\mu=0, 1, \dots r-2.]$$

$$A = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2'' & \mathfrak{A}_2''' & \dots & \mathfrak{A}_2^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & \mathfrak{A}_{r-1}^r \\ \mathfrak{B}'' & \mathfrak{B}''' & \dots & \mathfrak{B}^r \end{vmatrix} - \frac{r! \cdot (x')^{r+1} \log x'}{x'y_i - y'x_i}.$$

$$\mathfrak{A}_i^m \equiv \frac{1}{i!} \sum_{i=1}^{m-1} m_1 \sum_{i=2}^{m_1-1} m_2 \dots \sum_1^{m_{i-2}-1} m_{i-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \binom{m_{i-2}}{m_{i-1}} \frac{x^{m-m_1}}{x'} \frac{x^{m_1-m_2}}{x'} \dots \\ \dots \frac{x^{m_{i-2}-m_{i-1}}}{x'} \frac{x^{m_{i-1}-1}}{x'}.$$

$$\mathfrak{B}^m \equiv \frac{x'y^m - y'x^m}{x'y_i - y'x_i}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_{r+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu+1} \sum_0^{\nu} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1} \alpha_k^i \xi_{r-k}^{\mu-\nu-i+1} + \\ + \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{r+1} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu+1}{k} \alpha_k^i \eta_{r-k+1}^{\mu-\nu-i} - \\ - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \sum_0^i \sum_0^k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \alpha_\tau^\sigma \alpha_{k-\tau}^{i-\sigma} \eta_{r-k}^{\mu-\nu-i+1} = 0.$$

$$r \xi_{r+1}^{\mu-\nu+1} - \eta_{r+1}^{\mu-\nu} + \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \{(r+1) \alpha_k^i \eta_{r-k}^{\mu-\nu-i+1} - \\ - \lambda_k^{i+1} \xi_{r-k}^{\mu-\nu-i} - \lambda_{k+1}^i \eta_{r-k}^{\mu-\nu-i}\} = 0.$$

$$\xi^{\mu+2} + \sum_0^{\mu+2} \binom{\mu+2}{i} \alpha^i \eta^{\mu-i+2} + \sum_0^{\mu+1} \binom{\mu+1}{i} \left\{ \gamma^i \xi^{\mu-i+1} + \right. \\ \left. + \sum_0^i \binom{i}{\sigma} \alpha^\sigma \gamma^{i-\sigma} \eta^{\mu-i+1} \right\} = 0.$$

$$\sum_0^{r-1} \eta^{r-k} \left| \begin{array}{cccc} g_{r-k+1}^{r-k+1} & g_{r-k+1}^{r-k+2} & \dots & g_{r-k+1}^{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_r^{r+1} \\ 1 & \binom{r-k+1}{r-k+1} \eta' & \dots & \binom{r-k}{r-k} \eta^k \end{array} \right| + \frac{r!}{\lambda} [\xi' + \alpha \eta'] + \delta[r\xi' + (r+1)\alpha\eta' - \eta_r] + \delta' \xi + \delta \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\gamma_r = \alpha'' + \alpha \gamma' + \gamma \alpha'$$

$$\delta_r - \alpha \delta' + \delta(\lambda_r - \alpha \lambda') + r \alpha' \Theta^{-\lambda} = \left| \begin{array}{ccccc} 1 & g_1'' & g_1''' & \dots & g_1^{r+1} \\ 0 & 1 & g_2''' & \dots & g_2^{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_r^{r+1} \\ 1 & \eta' & \eta'' & \dots & \eta^r \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} g_t^m &\equiv \frac{1}{t!} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{i=2}^{m_1-1} \dots \sum_1^{m_t-2-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} [\gamma^{m-m_1-2} + \\ &+ \sum_2^{m-m_1-1} \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^{m-m_1-2} \sum_{h=2}^{l_1-1} \dots \sum_1^{l_{h-2}-1} \binom{m-m_1-1}{l_1} \binom{l_1}{l_2} \dots \\ &\dots \binom{l_{h-2}}{l_{h-1}} \gamma^{m-m_1-l_1-2} \gamma^{l_1-l_2-1} \dots \gamma^{l_{h-1}-1}] \dots [\gamma^{m_t-2-2} + \sum \dots] \\ \eta^m &\equiv \lambda^m + \sum_0^m \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^{m-1} \sum_{h=2}^{j_1-1} \dots \sum_1^{j_{h-2}-1} \binom{m}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \\ &\dots \binom{j_{h-2}}{j_{h-1}} \lambda^{m-j_1} \lambda^{j_1-j_2} \dots \lambda^{j_{h-2}-j_{h-1}} \lambda^{j_{h-1}} + \\ &+ \sum_1^m \binom{r+1}{i} \sum_i^m \sum_{i=1}^{m_1-1} \dots \sum_1^{m_i-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \\ &\dots \binom{m_{i-1}}{m_i} [\lambda^{m-m_1} + \sum_2^{m-m_1} \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^{m-m_1-1} \dots] \\ &\cdot [\gamma^{m_1-m_2-1} + \sum_2^{m_1-m_2} \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^{m_1-m_2-1} \sum_{h=2}^{l_1-1} \dots \sum_1^{l_{h-2}-1} \binom{m_1-m_2}{l_1} \binom{l_1}{l_2} \dots \\ &\dots \binom{l_{h-2}}{l_{h-1}} \gamma^{m_1-m_2-l_1-1} \gamma^{l_1-l_2-1} \dots \gamma^{l_{h-2}-l_{h-1}-1} \gamma^{l_{h-1}-1}] \dots \\ &\dots [\gamma^{m_{h-1}-1} + \sum \dots]. \end{aligned}$$

11.) $q, xq, \dots x^m q, \mathbf{e}^{\alpha_k x} q, x \mathbf{e}^{\alpha_k x} q, \dots x^{m_k} \mathbf{e}^{\alpha_k x} q, yq, p.$

$$\left[k = 1, 2, \dots l; l \leq 0; l + m + \sum_1^l m_k > 0; \alpha_1 = 1. \right]$$

Invarianten.

$$P_v^{\mu-\nu} = x_v^{\mu-\nu} \quad \left[\mu = 1, 2, \dots 1 + l + m + \sum_1^l m_k; \nu = 0, 1, \dots \mu. \right]$$

$$\mathcal{A}_v^{\mu-\nu} = (\log(x'y, -y'x))_v^{\mu-\nu} \left[\mu = 1, 2, \dots l + m + \sum_1^l m_k; \nu = 0, 1, \dots \mu. \right]$$

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2'' & \mathfrak{A}_2''' & \dots & \mathfrak{A}_2^s \\ 0 & \mathfrak{A}_3''' & \dots & \mathfrak{A}_3^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{A}_{s-1}^s \\ \mathfrak{B}'' & \mathfrak{B}''' & \dots & \mathfrak{B}^s \end{vmatrix}$$

$$s \equiv 1 + l + m + \sum_1^l m_k.$$

$$\mathfrak{A}_t^m \equiv \frac{1}{t!} \sum_{t-1}^{m-1} m_1 \sum_{t-2}^{m_1-1} m_2 \dots \sum_1^{m_{t-2}-1} m_{t-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \frac{x^{m-m_1}}{x'} \frac{x^{m_1-m_2}}{x'} \dots$$

$$\dots \frac{x^{m_{t-2}-m_{t-1}}}{x'} \frac{x^{m_{t-1}-m}}{x'}.$$

$$\mathfrak{B}^m \equiv \frac{x'y^m - y'x^m}{x'y, -y'x}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \{ \varrho_k^{i+1} \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} + \varrho_{k+1}^i \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} \} = 0$$

$$\xi_{\nu}^{\mu-\nu+1} + \eta_{\nu+1}^{\mu-\nu} + \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \{ \lambda_k^{i+1} \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} + \lambda_{k+1}^i \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} \} = 0$$

$$\sum_0^{s-1} \eta^{s-k} \begin{vmatrix} g_{s-k+1}^{s-k+1} & g_{s-k+1}^{s-k+2} & \dots & g_{s-k+1}^{s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_s^{s+1} \\ 1 & \binom{s-k+1}{s-k} \mathfrak{h}' & \dots & \binom{s-k}{s-k} g^k \end{vmatrix} + \delta \left[s \xi' + (s+1) \frac{\varrho'}{\varrho} \eta' - \eta \right] + \delta' \xi + \delta \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$(\varrho')_s = (\varrho'_s)'$, u. s. w., schon benutzt.

$$\delta, -\frac{\varrho'_s}{\varrho'}\delta' + \delta\left[\lambda, -\frac{\varrho'_s}{\varrho'}\lambda' - (s+1)\left(\frac{\varrho'_s}{\varrho'}\right)'\right] = \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{g}_1'' & \mathfrak{g}_1''' & \dots & \mathfrak{g}_1^{s+1} \\ 0 & 1 & \mathfrak{g}_2''' & \dots & \mathfrak{g}_2^{s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathfrak{g}_s^{s+1} \\ 1 & \mathfrak{h}' & \mathfrak{h}'' & \dots & \mathfrak{h}^s \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{g}_t^m \equiv \frac{1}{t!} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{i=2}^{m_1-1} \sum_{i=2}^{m_2-1} \dots \sum_{i=1}^{m_{t-1}-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \frac{\varrho^{m-m_1}}{\varrho'} \frac{\varrho^{m_1-m_2}}{\varrho'} \dots$$

$$\dots \frac{\varrho^{m_{t-2}-m_{t-1}}}{\varrho'} \frac{\varrho^{m_{t-1}}}{\varrho'}.$$

$$\mathfrak{h}^m \equiv \lambda^m + \sum_2^m \frac{1}{h!} \sum_{h=1}^{m-1} \sum_{h=2}^{m_1-1} \sum_{h=2}^{m_2-1} \dots \sum_{h=1}^{m_{h-1}-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots$$

$$\dots \binom{m_{h-2}}{m_{h-1}} \lambda^{m-m_1} \lambda^{m_1-m_2} \dots \lambda^{m_{h-2}-m_{h-1}} \lambda^{m_{h-1}}.$$

$$12.) \quad q, \ xq, \ F_1(x)q, \ \dots \ F_r(x)q.$$

$$[r \geq 0.]$$

Invarianten.

$$P_\nu^{\mu-\nu} = x_\nu^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0, 1, \dots, r+2; \nu = 0, 1, \dots, \mu.]$$

$$A_\nu^{\mu-\nu} = (\log(x'y, -y'x))_\nu^{\mu-\nu} \quad [\mu = 1, 2, \dots, r+1; \nu = 0, 1, \dots, \mu.]$$

$$A = \begin{vmatrix} F_1' & F_1'' & \dots & F_1^{(r+2)} \\ F_2' & F_2'' & \dots & F_2^{(r+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_r' & F_r'' & \dots & F_r^{(r+2)} \\ (x')^r \mathfrak{D}_2 & (x')^{r-1} \mathfrak{D}_3 & \dots & \mathfrak{D}_{r+2} \end{vmatrix}$$

$$F_i^{(n)} \equiv \frac{d^n F_i(x)}{dx^n}.$$

$$\mathfrak{D}_n \equiv \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2'' & \mathfrak{A}_2''' & \dots & \mathfrak{A}_2^n \\ 0 & \mathfrak{A}_3''' & \dots & \mathfrak{A}_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{A}_{n-1}^n \\ \mathfrak{B}'' & \mathfrak{B}''' & \dots & \mathfrak{B}^n \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{A}_t^m \equiv \frac{1}{t!} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m_1-1} \sum_{k=1}^{m_2-1} \dots \sum_{l=1}^{m_{t-2}-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \frac{x^{m-m_1}}{x'} \frac{x^{m_1-m_2}}{x'} \dots$$

$$\dots \frac{x^{m_{t-2}-m_{t-1}}}{x'} \frac{x^{m_{t-1}}}{x'}.$$

$$\mathfrak{B}^m \equiv \frac{x' y^m - y' x^m}{x' y, - y' x,}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \{ \varrho_{k+1}^{i+1} \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} + \varrho_{k+1}^i \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} \} = 0.$$

$$\xi_{\nu}^{\mu-\nu+1} + \eta_{\nu+1}^{\mu-\nu} + \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \{ \lambda_{k+1}^{i+1} \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} + \lambda_{k+1}^i \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} \} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{f}_r'' & \mathfrak{f}_r''' & \dots & \mathfrak{f}_r^{(r+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{f}_r'' & \mathfrak{f}_r''' & \dots & \mathfrak{f}_r^{(r+2)} \end{vmatrix} + \delta \left[(r+2) \xi' + (r+3) \frac{\varrho'}{\varrho} \eta' - \eta_r \right] +$$

$$+ \delta' \xi + \delta_r \eta = 0.$$

$$(\varrho')^r \mathfrak{d}_2 (\varrho')^{r-1} \mathfrak{d}_3 \dots \mathfrak{d}_{r+2}$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$(\varrho')_r = (\varrho_r)', \text{ u. s. w.}$$

$$\delta_r - \frac{\varrho_r'}{\varrho'} \delta' + \delta \left[\lambda_r - \frac{\varrho_r'}{\varrho'} \lambda' - (r+4) \left(\frac{\varrho_r'}{\varrho'} \right)' \right] = \begin{vmatrix} \mathfrak{f}_1'' & \mathfrak{f}_1''' & \mathfrak{f}_1^{IV} & \dots & \mathfrak{f}_1^{(r+2)} \\ \mathfrak{f}_2'' & \mathfrak{f}_2''' & \mathfrak{f}_2^{IV} & \dots & \mathfrak{f}_2^{(r+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{f}_r'' & \mathfrak{f}_r''' & \mathfrak{f}_r^{IV} & \dots & \mathfrak{f}_r^{(r+2)} \\ (\varrho')^r e_2 (\varrho')^{r-1} e_3 (\varrho')^{r-2} e_4 \dots e_{r-2} \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{f}_i^{(n)} \equiv F_i^{(n)}(\varrho).$$

$$b_n \equiv \sum_0^{n-1} \eta^{n-k} \begin{vmatrix} g_{n-k+1}^{n-k+1} & g_{n-k+1}^{n-k+2} & \dots & g_{n-k+1}^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_n^{n+1} \\ 1 & \binom{n-k+1}{n-k} \eta' & \dots & \binom{n-k}{n-k} \eta^k \end{vmatrix}$$

$$e_n \equiv \begin{vmatrix} 1 & g_1'' & g_1''' & \dots & g_1^{n+2} \\ 0 & 1 & g_2''' & \dots & g_2^{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n+1}^{n+2} \\ 1 & \eta' & \eta'' & \dots & \eta^{n+1} \end{vmatrix}$$

$$g_t \equiv \frac{1}{t!} \sum_{i=1}^{m-1} m_1 \sum_{i=2}^{m_1-1} m_2 \dots \sum_1^{m_{t-2}-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \frac{\varrho^{m-m_1}}{\varrho'} \frac{\varrho^{m_1-m_2}}{\varrho'} \dots$$

$$\dots \frac{\varrho^{m_{t-2}-m_{t-1}}}{\varrho'} \frac{\varrho^{m_{t-1}}}{\varrho'}.$$

$$\eta^m \equiv \lambda^m + \sum_2^m \frac{1}{i!} \sum_{i=1}^{m-1} m_1 \sum_{i=1}^{m_1-1} m_2 \dots \sum_1^{m_{i-1}-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots$$

$$\dots \binom{m_{i-1}}{m_i} \lambda^{m-m_1} \lambda^{m_1-m_2} \dots \lambda^{m_{i-1}-m_i} \lambda^{m_i}.$$

13.) $q, xq, x^2q, p, xp + yq, x^2p + 2xyq.$

$$A_\nu^{\mu-\nu} = \left(\frac{x_i}{x} \right)_\nu^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0, 1, 2; \nu = 0, 1, \dots, \mu.]$$

$$A_\nu^{\mu-\nu} = \left(\log \frac{x'y_i - y'x_i}{2x'^2} \right)_\nu^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0, 1, 2; \nu = 0, 1, \dots, \mu.]$$

$$\Omega = \frac{2x'x''' - 3x''^2}{2x'^2}$$

$$A = \frac{x'y''' - y'x'''}{x'y, - y'x,} - 3 \frac{x''}{x'} \cdot \frac{x'y'' - y'x''}{x'y, - y'x,}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\begin{aligned} \xi_{\nu+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu+1} \sum_0^{\nu} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1} \alpha_k^i \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} + \\ + \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu+1} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu+1}{k} \alpha_k^i \eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} - \\ - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \sum_0^i \sum_0^k \sigma \tau \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \alpha_{\tau}^{\sigma} \alpha_{k-\tau}^i \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{\nu}^{\mu-\nu+1} - \eta_{\nu+1}^{\mu-\nu} + \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \{ 2\alpha_k^i \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} - \lambda_k^{i+1} \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} - \\ - \lambda_{k+1}^i \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} \} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi''' + \alpha \eta''' + 3\alpha' \eta'' + 2\omega \xi' + (2\alpha\omega + 3\alpha'') \eta' + \omega' \xi + \omega, \eta = 0 \\ \eta''' + 3\lambda' \eta'' + 3\delta \xi' + (4\alpha\delta + 3\lambda'' + 3\lambda'^2 + 2\omega) \eta' - \delta \eta + \delta' \xi + \delta, \eta = 0. \end{aligned}$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\omega, = \alpha''' + 2\omega\alpha' + \alpha\omega'.$$

$$\delta, - \alpha\delta' + \delta(\lambda, - \alpha\lambda' - 2\alpha') = \lambda''' + 3\lambda'\lambda'' + \lambda'^3 + 2\omega\lambda' + \omega'.$$

$$14.) \quad p, \quad 2xp + yq, \quad x^2p + xyq.$$

Invarianten.

$$\begin{aligned} Z = \log \frac{x'}{y^2}, \quad A = \frac{x'}{x'}, \quad A = \log \frac{x'y', - y'x'}{y^3}, \quad B = \frac{x'y'' - y'x''}{x'y', - y'x'}, \\ Z', \quad A', \quad A, \quad A', \quad A. \end{aligned}$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi' + \alpha \eta' + \zeta' \xi + \zeta, \eta = 0$$

$$\xi, + \alpha(\eta, - \xi') - \alpha^2 \eta' + \alpha' \xi + \alpha, \eta = 0$$

$$\xi', + \eta, + \lambda' \xi + \lambda, \eta = 0$$

$$\eta'' + 2\beta \xi' + (2\lambda' - 3\zeta' + 3\alpha\beta) \eta' - \beta \eta, + \beta' \xi + \beta, \eta = 0$$

$$\xi'' + \alpha \eta'' + \zeta' \xi' + (\alpha \zeta' + 2\alpha' - \alpha^2 \zeta) \eta' + \zeta'' \xi + \zeta', \eta = 0$$

$$\xi', + \alpha(\eta', - \xi'') - \alpha^2 \eta'' + (\alpha, - 2\alpha\alpha') \eta' + \alpha' \eta, + \alpha'' \xi + \alpha', \eta = 0$$

$$\xi'' + \alpha(\eta, - \xi') - \alpha^2 \eta', - \alpha, \xi' + \alpha' \xi, - 2\alpha\alpha, \eta' + 2\alpha, \eta, + \alpha', \xi + \alpha, \eta = 0$$

$$\xi'' + \eta', + \lambda' \xi' + \lambda, \eta' + \lambda'' \xi + \lambda', \eta = 0$$

$$\xi, + \eta, + \lambda' \xi, + \lambda, \eta, + \lambda', \xi + \lambda, \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\beta, -\alpha\beta' + \beta(\lambda, -\alpha\lambda' + 2\alpha\zeta' - 2\zeta, +\alpha') = \lambda'' + \lambda'^2 - 3\lambda'\zeta' - \zeta'' + 2\zeta'^2$$

$$\zeta, = \alpha\zeta' + \alpha' - e^{\lambda-\zeta}.$$

$$15.) \quad q, xq, \dots x^r q, p, xp + yq.$$

$$[r > 0.]$$

Die sämtlichen Invarianten und Definitionsgleichungen dieses Typus bekommen wir, wenn wir in denen des neunten Typus die Constante $c = 1$ setzen.

$$16.) \quad q, p, xp + (x + y)q.$$

Invarianten.

$$A = \frac{x}{x'}$$

$$Z = \frac{y'}{x'} - \log x'$$

$$A = \log \frac{x'y, - y'x,}{x'^2}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi, + \alpha(\eta, - \xi') - \alpha^2\eta' + \alpha'\xi + \alpha, \eta = 0$$

$$\xi' + (\alpha - \lambda)\eta' - \xi'\xi - \zeta, \eta = 0$$

$$\xi' + 2\alpha\eta' - \eta, - \lambda'\xi - \lambda, \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$e^{-\lambda} [\zeta,, - 2\alpha\zeta' + \alpha^2\zeta'' + \alpha' - \alpha\alpha'' - \alpha'\zeta, + \alpha\lambda'\zeta, - \alpha, \zeta' + 2\alpha\alpha'\zeta' - \lambda, \zeta' +$$

$$+ \alpha\lambda, \zeta' - \alpha^2\lambda'\zeta' - \alpha'^2 - \alpha'\lambda, + \alpha\alpha'\lambda'] - \lambda' + \alpha\lambda'' - \alpha'' + \alpha'\lambda' = 0.$$

$$17.) \quad e^{\alpha k x} q, x e^{\alpha k x} q, \dots x^{m_k} e^{\alpha k x} q, p.$$

$$\left[\alpha_1(\alpha_1 - 1) = 0; k = 1, 2, \dots l; l > 0; l + \sum_{k=1}^l m_k > 1. \right]$$

Dieser Typus unterscheidet sich von dem Typus 11.) nur in dem Besitz der Invariante $\log(x'y, - y'x,)$ und der daraus folgenden Gleichung. Alle übrigen Invarianten, Definitionsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen stimmen mit den zu jenem Falle gehörigen überein.

$$18.) \quad q, \quad xq, \quad F_1(x)q, \quad \dots \quad F_r(x)q. \\ [r \leq 0.]$$

Dieser Typus unterscheidet sich von dem Typus 12.) nur in dem Besitz der Invariante $\log(x'y, -y'x)$ und der daraus folgenden Gleichung. Alle übrigen Invarianten, Definitionsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen stimmen mit den zu jenem Falle gehörigen überein.

$$19.) \quad q, \quad yq, \quad y^2q, \quad p, \quad xp, \quad x^2p.$$

Invarianten.

$$A_v^{\mu-\nu} = \left(\frac{x}{x'}\right)_v^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0, 1, 2; \nu = 0, \dots \mu.]$$

$$\Phi_v^{\mu-\nu} = \left(\frac{y}{y'}\right)_v^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0, 1, 2; \nu = 0, \dots \mu.]$$

$$\Omega = \frac{2x'x'' - 3x''^2}{2x'^2}$$

$$\Theta = \frac{2y'y'' - 3y''^2}{2y'^2}$$

Definitionsgleichungen.

$$\begin{aligned} \xi_{v+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu+1} \sum_0^{\nu} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1} \alpha_k^i \xi_{v-k}^{\mu-\nu-i+1} + \\ + \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu+1} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu+1}{k} \alpha_k^i \eta_{v-k+1}^{\mu-\nu-i} - \\ - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \sum_0^i \sum_0^k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \alpha_\tau^\sigma \alpha_{k-\tau}^{i-\sigma} \eta_{v-k}^{\mu-\nu-i+1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_v^{\mu-\nu+1} + \sum_0^{\mu-\nu+1} \sum_0^{\nu} \binom{\mu-\nu+1}{i} \binom{\nu}{k} \varphi_k^i \xi_{v-k}^{\mu-\nu-i+1} - \\ - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu+1} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\nu-2k+1}{\nu-k+1} \varphi_k^i \eta_{v-k+1}^{\mu-\nu-i} - \\ - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \sum_0^i \sum_0^k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \varphi_\tau^\sigma \varphi_{k-\tau}^{i-\sigma} \xi_{v-k+1}^{\mu-\nu-i} = 0. \end{aligned}$$

$$\xi''' + \alpha \eta''' + 3\alpha' \eta'' + 2\omega \xi' + (3\alpha'' + 2\alpha\omega) \eta' + \omega' \xi + \omega, \eta = 0$$

$$\eta''' + \varphi \xi''' + 3\varphi' \xi'' + (3\varphi'' + 2\varphi\theta) \xi' + 2\theta \eta' + \theta' \xi + \theta, \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\omega, = \alpha''' + 2\omega\alpha' + \alpha\omega'$$

$$\theta' = \varphi''' + 2\theta\varphi' + \varphi\theta'.$$

20.) $p + q, xp + yq, x^2p + y^2q.$

Invarianten.

$$A = \frac{x'}{x}, \quad \Phi = \frac{y'}{y}, \quad E = \log \frac{x'y - y'x}{(x-y)^2}.$$

Die Definitionsgleichungen dieses Typus bekommen wir, wenn wir in denen des 25. Typus die Constante $c = -1$ setzen.

21.) $q, yq, y^2q, p, xp.$

Invarianten.

$$A_v^{\mu-\nu} = \left(\frac{x'}{x}\right)_v^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0, 1, 2; \nu = 0, \dots \mu.]$$

$$I^\mu = \left(\frac{x''}{x'}\right)^\mu \quad [\mu = 0, 1.]$$

$$\Phi_v^{\mu-\nu} = \left(\frac{y'}{y}\right)_v^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0, 1, 2; \nu = 0, \dots \mu.]$$

$$\Theta = \frac{2y, y''' - 3y''^2}{2y,^2}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\begin{aligned} \xi_{v+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu+1} \sum_0^{\nu} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1} \alpha_k^i \xi_{v+k}^{\mu-\nu-i+1} + \\ + \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu+1} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu+1}{k} \alpha_k^i \eta_{v-k+1}^{\mu-\nu-i} - \\ - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \sum_0^i \sum_0^k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \alpha_\tau^\sigma \alpha_{k-\tau}^{i-\sigma} \eta_{v-k}^{\mu-\nu-i+1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi^{\mu+2} + \sum_0^{\mu+2} \binom{\mu+2}{i} \alpha^i \eta^{\mu-i+2} + \\ + \sum_0^{\mu+1} \binom{\mu+1}{i} \left\{ \gamma^i \xi^{\mu-i+1} + \sum_0^i \binom{i}{\sigma} \alpha^\sigma \gamma^{i-\sigma} \eta^{\mu-i+1} \right\} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_v^{\mu-\nu+1} + \sum_0^{\mu-\nu+1} \sum_0^{\nu} k \binom{\mu-\nu+1}{i} \binom{\nu}{k} \varphi_k^i \xi_{v-k}^{\mu-\nu-i+1} - \\ - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu+1} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\nu-2k+1}{\nu-k+1} \varphi_k^i \eta_{v-k+1}^{\mu-\nu-i} - \\ - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \sum_0^i \sum_0^k \tau \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \varphi_{\tau}^{\sigma} \varphi_{k-\tau}^{i-\sigma} \xi_{v-k+1}^{\mu-\nu-i} = 0. \end{aligned}$$

$$\eta_m + \varphi \xi_m + 3\varphi, \xi_m + (3\varphi_m + 2\varphi\theta)\xi + 2\theta\eta + \theta'\xi + \theta, \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\theta' = \varphi_m + \theta\varphi + 2\varphi\theta,.$$

Die Bedingung $\gamma, = \alpha'' + \alpha\gamma' + \gamma\alpha'$ ist schon benutzt worden.

$$22.) \quad q, \ yq, \ y^2q, \ p.$$

Invarianten.

$$P_v^{\mu-\nu} = x_v^{\mu-\nu} \quad [\mu = 1, 2, 3; \nu = 0, \dots \mu.]$$

$$\mathcal{O}_v^{\mu-\nu} = \left(\frac{y'}{y,}\right)_v^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0, 1, 2; \nu = 0, \dots \mu.]$$

$$\Theta = \frac{2y, y_m - 3y''^2}{2y'^2}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \{ \varrho_k^{i+1} \xi_{v-k}^{\mu-\nu-i} + \varrho_{k+1}^i \eta_{v-k}^{\mu-\nu-i} \} = 0$$

$$\begin{aligned} \eta_v^{\mu-\nu+1} + \sum_0^{\mu-\nu+1} \sum_0^{\nu} k \binom{\mu-\nu+1}{i} \binom{\nu}{k} \varphi_k^i \xi_{v-k}^{\mu-\nu-i+1} - \\ - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu+1} k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\nu-2k+1}{\nu-k+1} \varphi_k^i \eta_{v-k+1}^{\mu-\nu-i} - \\ - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \sum_0^i \sum_0^k \tau \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \varphi_{\tau}^{\sigma} \varphi_{k-\tau}^{i-\sigma} \xi_{v-k+1}^{\mu-\nu-i} = 0. \end{aligned}$$

$$\eta_m + \varphi \xi_m + 3\varphi, \xi_m + (3\varphi_m + 2\varphi\theta)\xi + 2\theta\eta + \theta'\xi + \theta', \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\theta' = \varphi_m + \theta\varphi + 2\varphi\theta,.$$

23.) $q, yq, y^2q.$

Invarianten.

$$P_v^{\mu-\nu} = x_v^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0, 1, 2, 3; \nu = 0, 1, \dots, \mu.]$$

$$\Phi_v^{\mu-\nu} = \left(\frac{y'}{y}\right)_v^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0, 1, 2; \nu = 0, \dots, \mu.]$$

$$\Theta = \frac{2y, y'' - 3y_n^2}{2y^2}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\sum_{i=0}^{\mu-\nu} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\mu}{i} \binom{\nu}{k} \{q_{k+1}^{i+1} \xi_{v-k}^{\mu-\nu-i} + q_{k+1}^i \eta_{v-k}^{\mu-\nu-i}\} = 0$$

$$\begin{aligned} \eta_v^{\mu-\nu+1} + \sum_{i=0}^{\mu-\nu+1} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\mu-\nu+1}{i} \binom{\nu}{k} \varphi_k^i \xi_{v-k}^{\mu-\nu-i+1} - \\ - \sum_{i=0}^{\mu-\nu} \sum_{k=0}^{\nu+1} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\nu-2k+1}{\nu-k+1} \varphi_k^i \eta_{v-k+1}^{\mu-\nu-i} - \\ - \sum_{i=0}^{\mu-\nu} \sum_{k=0}^i \sum_{\sigma=0}^i \sum_{\tau=0}^k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \varphi_{\tau}^{\sigma} \varphi_{k-\tau}^{i-\sigma} \xi_{v-k+1}^{\mu-\nu-i} = 0. \end{aligned}$$

$$\eta''' + \varphi \xi'' + 3\varphi, \xi'' + (3\varphi'' + 2\varphi\theta)\xi + 2\theta\eta + \theta'\xi + \theta, \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\theta' = \varphi''' + \theta\varphi + 2\varphi\theta,.$$

24.) $q, yq, p, xp.$

$$\mathcal{A} = \frac{x}{x'}, \quad \mathcal{O} = \frac{y'}{y}, \quad \Gamma = \frac{x''}{x'}, \quad \mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{O}', \mathcal{O}, \Psi = \frac{y''}{y}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi + \alpha(\eta, -\xi') - \alpha^2\eta' + \alpha'\xi + \alpha, \eta = 0$$

$$\eta' + \varphi(\xi' - \eta) - \varphi^2\xi + \varphi'\xi + \varphi, \eta = 0$$

$$\xi'' + \alpha\eta'' + \gamma\xi' + (2\alpha' + \alpha\gamma)\eta' + \gamma'\xi + \gamma, \eta = 0$$

$$\xi', + \alpha(\eta', -\xi'') - \alpha^2\eta'' + (\alpha, -2\alpha\alpha')\eta' + \alpha''\eta + \alpha'\xi + \alpha', \eta = 0$$

$$\xi'' + \alpha(\eta'' - \xi') - \alpha^2\eta' - \alpha, \xi' + \alpha'\xi - 2\alpha\alpha, \eta' + 2\alpha, \eta + \alpha', \xi + \alpha, \eta = 0$$

$$\begin{aligned} \eta_v^{\mu-v+1} + \sum_0^{\mu-v+1} \sum_0^v k \binom{\mu-v+1}{i} \binom{\nu}{k} \varphi_k^i \xi_{v-k}^{\mu-v-i+1} - \\ - \sum_0^{\mu-v} \sum_0^{v+1} k \binom{\mu-v}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\nu-2k+1}{\nu-k+1} \varphi_k^i \eta_{v-k+1}^{\mu-v-i} - \\ - \sum_0^{\mu-v} \sum_0^v \sum_0^i \sum_0^k \tau \binom{\mu-v}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \varphi_\tau^\sigma \varphi_{k-\tau}^{i-\sigma} \xi_{v-k+1}^{\mu-v-i} = 0. \end{aligned}$$

$$\eta_m + \varphi \xi_m + 3\varphi, \xi_m + (3\varphi_m + 2\varphi\theta)\xi, + 2\theta\eta, + \theta'\xi + \theta, \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\theta' = \varphi_m + \theta\varphi, + 2\varphi\theta,.$$

Die Bedingung $\gamma, = \alpha'' + \alpha\gamma' + \gamma\alpha'$ ist schon benutzt worden.

$$22.) \quad q, \quad yq, \quad y^2q, \quad p.$$

Invarianten.

$$P_v^{\mu-v} = x_v^{\mu-v} \quad [\mu = 1, 2, 3; \nu = 0, \dots \mu.]$$

$$\mathcal{O}_v^{\mu-v} = \left(\frac{y'}{y,}\right)_v^{\mu-v} \quad [\mu = 0, 1, 2; \nu = 0, \dots \mu.]$$

$$\Theta = \frac{2y, y_m - 3y_n^2}{2y,^2}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\sum_0^{\mu-v} \sum_0^v k \binom{\mu-v}{i} \binom{\nu}{k} \{ \varrho_{k+1}^{i+1} \xi_{v-k}^{\mu-v-i} + \varrho_{k+1}^i \eta_{v-k}^{\mu-v-i} \} = 0$$

$$\begin{aligned} \eta_v^{\mu-v+1} + \sum_0^{\mu-v+1} \sum_0^v k \binom{\mu-v+1}{i} \binom{\nu}{k} \varphi_k^i \xi_{v-k}^{\mu-v-i+1} - \\ - \sum_0^{\mu-v} \sum_0^{v+1} k \binom{\mu-v}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\nu-2k+1}{\nu-k+1} \varphi_k^i \eta_{v-k+1}^{\mu-v-i} - \\ - \sum_0^{\mu-v} \sum_0^v \sum_0^i \sum_0^k \tau \binom{\mu-v}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \varphi_\tau^\sigma \varphi_{k-\tau}^{i-\sigma} \xi_{v-k+1}^{\mu-v-i} = 0. \end{aligned}$$

$$\eta_m + \varphi \xi_m + 3\varphi, \xi_m + (3\varphi_m + 2\varphi\theta)\xi, + 2\theta\eta, + \theta'\xi + \theta' \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\theta' = \varphi_m + \theta\varphi, + 2\varphi\theta,.$$

23.) $q, yq, y^2q.$

Invarianten.

$$P_r^{\mu-\nu} = x_r^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0, 1, 2, 3; \nu = 0, 1, \dots \mu.]$$

$$\Phi_r^{\mu-\nu} = \left(\frac{y}{y_r}\right)^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0, 1, 2; \nu = 0, \dots \mu.]$$

$$\Theta = \frac{2y, y'' - 3y''^2}{2y^2}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \binom{\mu}{i} \binom{\nu}{k} \{ \varrho_k^{i+1} \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} + \varrho_{k+1}^i \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} \} = 0$$

$$\begin{aligned} \eta_{\nu}^{\mu-\nu+1} + \sum_0^{\mu-\nu+1} \sum_0^{\nu} \binom{\mu-\nu+1}{i} \binom{\nu}{k} \varphi_k^i \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} - \\ - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu+1} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\nu-2k+1}{\nu-k+1} \varphi_k^i \eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} - \\ - \sum_0^{\mu-\nu} \sum_0^{\nu} \sum_0^i \sum_0^k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \varphi_{\tau}^{\sigma} \varphi_{k-\tau}^{i-\sigma} \xi_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} = 0. \end{aligned}$$

$$\eta_{\mu} + \varphi \xi_{\mu} + 3\varphi, \xi_{\mu} + (3\varphi_{\mu} + 2\varphi\theta)\xi + 2\theta\eta + \theta'\xi + \theta, \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\theta' = \varphi_{\mu} + \theta\varphi + 2\varphi\theta.$$

24.) $q, yq, p, xp.$

$$\mathcal{A} = \frac{x}{x'}, \quad \mathcal{O} = \frac{y}{y'}, \quad \Gamma = \frac{x''}{x'}, \quad \mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{O}', \mathcal{O}, \Psi = \frac{y''}{y}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\begin{aligned} \xi_r + \alpha(\eta_r - \xi') - \alpha^2\eta' + \alpha'\xi + \alpha, \eta &= 0 \\ \eta' + \varphi(\xi' - \eta_r) - \varphi^2\xi + \varphi'\xi + \varphi, \eta &= 0 \\ \xi'' + \alpha\eta'' + \gamma\xi' + (2\alpha' + \alpha\gamma)\eta' + \gamma'\xi + \gamma, \eta &= 0 \\ \xi'_r + \alpha(\eta'_r - \xi'') - \alpha^2\eta'' + (\alpha - 2\alpha\alpha')\eta' + \alpha'\eta_r + \alpha''\xi + \alpha', \eta &= 0 \\ \xi_{\mu} + \alpha(\eta_{\mu} - \xi') - \alpha^2\eta'_r - \alpha, \xi' + \alpha'\xi - 2\alpha\alpha, \eta' + 2\alpha, \eta_r + \alpha'\xi + \alpha_{\mu}, \eta &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta'' + \varphi(\xi'' - \eta') - \varphi^2 \xi' + 2\varphi' \xi' - 2\varphi \varphi' \xi + \varphi, \eta' - \varphi' \eta + \varphi'' \xi + \varphi' \eta &= 0 \\ \eta' + \varphi(\xi' - \eta'') - \varphi^2 \xi'' + \varphi, \xi' + (\varphi' - 2\varphi \varphi') \xi + \varphi' \xi + \varphi'' \eta &= 0 \\ \eta'' + \varphi \xi'' + (2\varphi, + \varphi \psi) \xi + \psi \eta + \psi' \xi + \psi, \eta &= 0.\end{aligned}$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\begin{aligned}\gamma, &= \alpha'' + \alpha \gamma' + \gamma \alpha' \\ \psi' &= \varphi'' + \varphi \psi, + \psi \varphi,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}25.) \quad & q, \quad p, \quad xp + cyq. \\ & [c \neq 0, 1.] \end{aligned}$$

Invarianten.

$$A = \frac{x,}{x'}, \quad \Phi = \frac{y'}{y}, \quad E = \log \frac{x'y, - y'x,}{(x')^{c+1}}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\begin{aligned}\xi, + \alpha(\eta, - \xi') - \alpha^2 \eta' + \alpha' \xi + \alpha, \eta &= 0 \\ \eta' + \varphi(\xi' - \eta,) - \varphi^2 \xi + \varphi' \xi + \varphi, \eta &= 0 \\ c\xi' + (c+1)\alpha \eta' - \eta, - \varepsilon' \xi - \varepsilon, \eta &= 0.\end{aligned}$$

Integrabilitätsbedingung.

$$\begin{aligned}(c+1)(1-\alpha\varphi)^3\{\varepsilon''\alpha - \varepsilon'(1+\alpha\varphi) + \varepsilon''\varphi\} + \\ + (c+1)(1-\alpha\varphi)^2\{-\alpha''[c-(c+1)\alpha\varphi] + \alpha'\varphi[(c-1)- \\ - (c+1)\alpha\varphi] + \alpha''\varphi^2 + \varphi''\alpha^2 - 2\varphi'\alpha + \varphi''\} + \\ + (c+1)(1-\alpha\beta)\{-\alpha'^2\varphi[(c-1)-(c+1)\alpha\varphi] + \\ + \alpha'\alpha, \varphi^2[(c-3)-(c+1)\alpha\varphi] + 2\alpha,^2\varphi^3\} + \\ + (c+1)(1-\alpha\varphi)^2\{(\alpha'-\varphi\alpha,)(\varepsilon'-\varphi\varepsilon,)+(\alpha\varphi'-\varphi,)(\alpha\varepsilon'-\varepsilon,)\} + \\ + (c+1)(1-\alpha\beta)\{-\alpha'\varphi'\alpha[(c-3)-(c+1)\alpha\varphi] + \\ + \alpha'\varphi,[(c-2)-(c+2)\alpha\varphi]\} + 4\alpha(1-\alpha\varphi)(\alpha\varphi'-\varphi,)^2 - \\ - \alpha, \varphi'[(c+1)-(\xi c+1)\alpha\varphi + 3(c-1)\alpha^2\varphi^2] + \\ + \alpha, \varphi, \varphi[(4c+1)-(c+4)\alpha\varphi] = 0.\end{aligned}$$

$$26.) \quad q, \quad yq, \quad p.$$

Invarianten.

$$P' = x', \quad P, = x, \quad \Phi = \frac{y'}{y}, \quad P', \quad P', \quad P'', \quad \Phi', \quad \Phi,, \quad \Psi = \frac{y''}{y,}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\varrho' \xi' + \varrho, \eta' + \varrho'' \xi + \varrho' \eta = 0$$

$$\varrho' \xi, + \varrho, \eta, + \varrho' \xi + \varrho, \eta = 0$$

$$\eta' + \varphi(\xi' - \eta,) - \varphi^2 \xi, + \varphi' \xi + \varphi, \eta = 0$$

$$\varrho' \xi'' + \varrho, \eta'' + 2\varrho'' \xi' + 2\varrho' \eta' + \varrho''' \xi + \varrho'' \eta = 0$$

$$\varrho' \xi', + \varrho, \eta', + \varrho' \xi' + \varrho'' \xi, + \varrho, \eta' + \varrho' \eta, + \varrho'' \xi + \varrho', \eta = 0$$

$$\varrho' \xi,, + \varrho, \eta,, + 2\varrho' \xi, + 2\varrho, \eta, + \varrho'' \xi + \varrho,, \eta = 0$$

$$\eta'' + \varphi(\xi'' - \eta'') - \varphi^2 \xi', + 2\varphi' \xi' - 2\varphi \varphi' \xi' + \varphi, \eta' - \varphi' \eta, + \varphi'' \xi + \varphi', \eta = 0$$

$$\eta', + \varphi(\xi' - \eta,) - \varphi^2 \xi,, + \varphi, \xi' + (\varphi' - 2\varphi \varphi,) \xi, + \varphi' \xi + \varphi, \eta = 0$$

$$\eta,, + \varphi \xi,, + (2\varphi, + \varphi \psi) \xi, + \psi \eta, + \psi' \xi + \psi, \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\psi' = \varphi,, + \varphi \psi, + \psi \varphi,.$$

27.)

$q, \ yq.$

Invarianten.

$$P = x, \ P' = x', \ P, = x,, \ \Phi = \frac{y'}{y}, \ \Psi = \frac{y''}{y}, \ P'', \ P', \ P,, \ \Phi', \ \Phi,.$$

Definitionsgleichungen.

$$\varrho' \xi + \varrho, \eta = 0$$

$$\varrho' \xi' + \varrho, \eta' + \varrho'' \xi + \varrho' \eta = 0$$

$$\varrho' \xi, + \varrho, \eta, + \varrho' \xi + \varrho, \eta = 0$$

$$\eta' + \varphi(\xi' - \eta,) - \varphi^2 \xi, + \varphi' \xi + \varphi, \eta = 0$$

$$\eta'' + \varphi \xi,, + (2\varphi, + \varphi \psi) \xi, + \psi \eta, + \psi' \xi + \psi, \eta = 0$$

$$\varrho' \xi'' + \varrho, \eta'' + 2\varrho'' \xi' + 2\varrho' \eta' + \varrho''' \xi + \varrho'' \eta = 0$$

$$\varrho' \xi', + \varrho, \eta', + \varrho' \xi' + \varrho'' \xi, + \varrho, \eta' + \varrho' \eta, + \varrho'' \xi + \varrho', \eta = 0$$

$$\varrho' \xi,, + \varrho, \eta,, + 2\varrho' \xi, + 2\varrho, \eta, + \varrho'' \xi + \varrho,, \eta = 0$$

$$\eta'' + \varphi(\xi'' - \eta'') - \varphi^2 \xi', + 2\varphi' \xi' - 2\varphi \varphi' \xi' + \varphi, \eta' - \varphi' \eta, + \varphi'' \xi + \varphi', \eta = 0$$

$$\eta', + \varphi(\xi' - \eta,) - \varphi^2 \xi,, + \varphi, \xi' + (\varphi' - 2\varphi \varphi,) \xi, + \varphi' \xi + \varphi, \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\varrho' = (\varrho)'; \ \varrho, = (\varrho), \text{ sind beide schon benutzt worden.}$$

$$\psi' = \varphi,, + \varphi \psi, + \psi \varphi,.$$

28.) $p, q, xp + yq.$

Die sämtlichen Invarianten und Definitionsgleichungen dieses Typus bekommen wir, wenn wir in denen des 25. Typus die Constante $c = 1$ setzen.

29.] $q, xp + yq.$

Invarianten.

$$P = \log \frac{x'}{x}, \quad A = \frac{x'}{x}, \quad \Phi = \frac{y'}{y}, \quad E = \log \frac{y'}{y}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\begin{aligned} \xi' + \alpha\eta' + \varrho'\xi + \varrho,\eta &= 0 \\ \xi, + \alpha(\eta, - \xi') - \alpha^2\eta' + \alpha'\xi + \alpha,\eta &= 0 \\ \eta' + \varphi(\xi' - \eta,) - \varphi^2\xi, + \varphi'\xi + \varphi,\eta &= 0 \\ \xi' - \varphi\xi, + \alpha\eta' - \eta, - \varepsilon'\xi - \varepsilon,\eta &= 0. \end{aligned}$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\begin{aligned} \varrho, &= \alpha' + \alpha\varrho' \\ \varepsilon' + \varepsilon\alpha' &= \varepsilon\varphi, + \varphi\varepsilon, + \varepsilon\varphi\alpha,. \end{aligned}$$

30.) $p, q.$

Invarianten.

$$P' = x', \quad P, = x,, \quad Y' = y', \quad Y, = y,.$$

Definitionsgleichungen.

$$\begin{aligned} \varrho'\xi' + \varrho,\eta' + \varrho''\xi + \varrho'\eta &= 0 \\ \varrho'\xi, + \varrho,\eta, + \varrho'\xi + \varrho'',\eta &= 0 \\ v'\xi' + v,\eta' + v''\xi + v'\eta &= 0 \\ v'\xi, + v,\eta, + v'\xi + v'',\eta &= 0 \end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingungen $(\varrho)', -(\varrho,)' = (v)', -(v,)' = 0$ sind schon benutzt worden.

31.) $q.$

Invarianten.

$$P = x, \quad P' = x', \quad P, = x,, \quad Y' = y', \quad Y, = y,.$$

Definitionsgleichungen.

$$(q)'\xi + (q),\eta = 0$$

$$q'\xi + q,\eta' + (q')'\xi + (q'),\eta = 0$$

$$q'\xi, + q,q, + (q,)\xi + (q,)\eta = 0$$

$$v'\xi' + v,\eta' + (v')'\xi + (v'),\eta = 0$$

$$v'\xi, + v,\eta, + (v,)\xi + (v,)\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$(q),(\psi\varphi' - \varphi\psi') - (q)'(\psi\varphi, - \varphi\psi,) = 0,$$

wo $\varphi \equiv (q)', - (q,)', \psi \equiv (v)', - (v,)'$ bedeuten.



Lebenslauf.

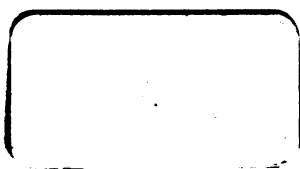
Ich, Arthur Graham Hall, evangelischer Confession, wurde am 9. December 1865 als Sohn des städtischen Schulsuperintendenten Clark Benedict Hall zu Memphis, Michigan, in den Vereinigten Staaten von Nordamerika, geboren. Nachdem ich den Elementarunterricht auf den Bürgerschulen zu Oxford, Michigan und Wayne, Michigan, erhalten hatte, war ich Schüler in den Gymnasien zu Wayne, Michigan und Hastings, Michigan. Nach erlangtem Maturitätszeugnis bezog ich September 1883 die Universität Michigan und machte im Juni 1887 mein Baccalaureatsexamen.

Von September 1887 bis Juni 1891 war ich Mathematiklehrer und Rector des Gymnasiums zu La Porte, Indiana, und von Februar 1893 bis Juni 1894 Lehrer der Mathematik und Physik an dem Gymnasium zu Grand Rapids, Michigan.

Von September 1891 bis Februar 1893, und seit September 1894 bin ich »Instructor« der Mathematik an der Universität Michigan. Von September 1894 bis Juni 1900 war ich auch Student in der »Graduate School« der Universität Michigan und hörte die Vorlesungen und nahm teil an den Seminaren und Übungen der Herren Professoren Beman, Carhart, Markley, Patterson und Ziwet.

Oktober 1900 bezog ich die Universität Leipzig, um mich dem Studium der Mathematik zu widmen. Während meiner hiesigen Studienzeit hörte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren und Docenten Boltzmann, Engel, Hausdorff, Hölder, Kowalewski und Neumann, und nahm teil an den Seminaren und Übungen der Herren Professoren Boltzmann, Engel und Kowalewski.

Meinen obengenannten hochverehrten Lehrern bin ich aufrichtigen Dank schuldig für alles das, was mir durch ihre Anregung zu teil wurde.





3 2044 102 93

